SUR QUELQUES INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES DE PREMIER ET DE DEUXIÈME ORDRE

THÈSE N° 3010 (2004)

PRÉSENTÉE À LA FACULTÉ SCIENCES DE BASE

Institut d'analyse et calcul scientifique

SECTION DE MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Gisella CROCE

laurea in matematica, Università degli Studi di Roma "La Sapienza", Italie
et de nationalité italienne

acceptée sur proposition du jury:

Prof. B. Dacorogna, directeur de thèse
Prof. H. Attouch, rapporteur
Prof. L. Boccardo, rapporteur
Prof. C.A. Stuart, rapporteur

Lausanne, EPFL
2004

Remerciements

C'est un grand plaisir pour moi de remercier toutes les personnes qui m'ont aider à la réalisation de ce travail.

Je remercie le Professeur Bernard Dacorogna pour tout ce que j'ai appris avec lui pendant ces trois ans, soit d'un point de vue mathématique, soit d'un point de vue humain. Je tiens à lui exprimer ma reconnaissance pour toute l'attention, la disponibilité et la patience avec lesquelles il a suivi ma thèse.

Je remercie les Professeurs H. Attouch, L. Boccardo et C.A. Stuart pour avoir accepté d'être membres du jury de ma thèse et le Professeur T. Mountford pour en avoir été le président.

Je remercie les collègues de ma chaire, en particulier Giovanni et Ana Margarida tout d'abord pour avoir étés des amis très chers et pour leur précieux soutien scientifique.

Je tiens à remercier les amis du Département de Mathématiques, dont la liste des noms m'oblige à les remercier en groupe. Merci à Marco, pour sa constante disponibilité informatique.

Un grand merci à ma famille pour m'avoir aidé de loin (malheureusement) et à Gian Piero, pour les encouragements qu'il m'a toujours transmis et pour sa patience.

Résumé

Le sujet principal de cette thèse est l'étude de problèmes de Dirichlet relatifs à des inclusions différentielles de premier et de deuxième ordre. Nous avons étudié les deux problèmes suivants :

$$\begin{cases} Du \in E & \text{p.p. dans } \Omega \\ u(x) = \varphi(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

où $E \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ est un ensemble isotrope compact et

$$\begin{cases} D^2u \in E & \text{p.p. dans } \Omega \\ u(x) = \varphi(x) & x \in \partial\Omega \\ Du(x) = D\varphi(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

où

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : |\xi_{ij}| = a_{ij}, a_{ij} > 0,\, i, j = 1, 2\}\,.$$

Nous avons établi des théorèmes d'existence de solutions de classe $W^{1,\infty}$ et $W^{2,\infty}$ respectivement.

Par ailleurs nous avons étudié un problème de minimisation : le calcul de la constante $\alpha(p, q, r)$ définie par

$$\alpha\,(p, q, r) = \inf\left\{\frac{\|u'\|_p}{\|u\|_q} : u \in W^{1,p}_{pér}\,(-1, 1) \setminus \{0\}\,,\ \int_{-1}^{1} |u|^{r-2}u = 0\right\}$$

où $W^{1,p}_{pér}\,(-1, 1)$ est l'ensemble des fonctions $W^{1,p}(-1, 1)$ telles que $u(-1) = u(1)$.

Abstract

The principal subject of this thesis is the study of some Dirichlet problems related to differential inclusions of first and second order. We have studied the two following problems :

$$\begin{cases} Du \in E & \text{a.e. in } \Omega \\ u(x) = \varphi(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

where $E \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ is a compact isotropic set and

$$\begin{cases} D^2u \in E & \text{a.e. in } \Omega \\ u(x) = \varphi(x) & x \in \partial\Omega \\ Du(x) = D\varphi(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

where

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : |\xi_{ij}| = a_{ij}, a_{ij} > 0,\, i,j = 1,2\right\}.$$

We show some existence theorems of $W^{1,\infty}$ and $W^{2,\infty}$ solutions respectively.

Moreover we have studied a minimization problem : the computation of $\alpha(p,q,r)$ defined by

$$\alpha\left(p,q,r\right) = \inf\left\{\frac{\|u'\|_p}{\|u\|_q} : u \in W_{per}^{1,p}\left(-1,1\right)\setminus\{0\},\ \int_{-1}^{1}|u|^{r-2}u = 0\right\}$$

where $W_{per}^{1,p}\left(-1,1\right)$ is the set of $W^{1,p}(-1,1)$ functions such that $u(-1) = u(1)$.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Dans cette thèse nous avons traité deux types de problèmes séparément : la minimisation d'une fonctionnelle et l'étude d'inclusions différentielles. Le genre de techniques utilisées sont différentes et ceci nous a amenés à diviser la thèse en deux parties : dans la première partie nous allons discuter le problème de minimisation et dans la deuxième, la plus importante et la plus développée, quelques inclusions différentielles de premier et de deuxième ordre.

1.0.1 Première partie : un problème de minimisation

Nous avons étudié le problème suivant : le calcul de la constante $\alpha(p,q,r)$ qui est définie par

$$\alpha\,(p,q,r) = \inf\left\{\frac{\|u'\|_p}{\|u\|_q} : u \in W^{1,p}_{pér}\,(-1,1)\setminus\{0\}\,,\ \int_{-1}^{1}|u|^{r-2}u = 0\right\}$$

où $W^{1,p}_{pér}\,(-1,1)$ est l'ensemble des fonctions $W^{1,p}(-1,1)$ telles que $u(-1)=u(1)$. Ce problème est une généralisation de l'inégalité de Wirtinger, c'est à dire

$$\|u'\|_2 \geq \pi\|u\|_2, \quad \forall\ u \in W^{1,2}_{pér}(-1,1) : \int_{-1}^{1} u = 0$$

(en fait $p=q=r=2$) ; on rappelle aussi que cette dernière constante est liée au problème isopérimétrique classique

$$[L(\partial A)]^2 \geq 4\pi mes(A)$$

où $A \subseteq \mathbb{R}^2$ est un ensemble suffisamment régulier de bord ∂A, $L(\partial A)$ est la longueur du bord de A et $mes(A)$ est la mesure de Lebesgue de l'ensemble A (voir [9]).

Récemment plusieurs généralisations de l'inégalité de Wirtinger ont été faites. Nous allons décrire celles qui nous ont amenés au calcul de $\alpha(p,q,r)$. Tout d'abord le cas $q=r$ a été étudié par Dacorogna-Pfister [13] et par Dacorogna-Gangbo-Subía [10] qui ont calculé $\alpha(p,q,q)$. Le calcul de cette constante est très important, parce que c'est un cas particulier du théorème de Wulff en dimension 2 (un problème isopérimétrique plus général que l'inégalité isopérimétrique classique) [13], et plus précisément la recherche de la meilleure constante C dans l'inégalité

$$[F(\partial A)]^2 - Cmes(A) \geq 0$$

où $A \subset \mathbb{R}^2$ est un ensemble suffisamment régulier de bord ∂A, et

$$F(\partial A) = \int_{-1}^{1} [|x'(t)|^p + |y'(t)|^p]^{\frac{1}{p}} dt$$

si $(x(t), y(t)), t \in (-1, 1)$ est une paramétrisation de ∂A.
Après Belloni-Kawohl [3] et Kawohl [22] ont amélioré le cas $r = 2$, en prouvant que $\alpha(p, q, 2) = \alpha(p, q, q)$ si $q \leq 2p+1$. Par ailleurs Buslaev-Kondratiev-Nazarov [6] ont montré que nous avons l'inégalité stricte si $q > 3p$ et Nazarov [28] a montré qu'on a l'inégalité stricte si et seulement si $q > 3p$. On remarque que si $r = 2$ ces constantes sont utilisées dans divers contextes (voir par exemple [17], [24], [25] et [29]) de problèmes de valeurs propres d'opérateurs elliptiques.

Dans cette thèse nous avons unifié et généralisé les résultats existants par l'introduction du paramètre r, et nous avons établi le théorème suivant. En posant p' l'exposant conjugué de p (c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) et la fonction Beta (voir [1] ou [35])

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

on a

Théorème 1.0.1. *Soient $p > 1$, $q \geq r - 1 \geq 1$, $q > 1$; alors*

$$\alpha(p, q, r) = \alpha(p, q, q) \quad si\ q \leq rp + r - 1$$
$$\alpha(p, q, r) < \alpha(p, q, q) \quad si\ q > (2r - 1)p.$$

De plus

$$\alpha(p, q, q) = 2\left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{2}{p'+q}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} B\left(\frac{1}{p'}, \frac{1}{q}\right).$$

Par ailleurs nous avons calculé aussi les constantes $\alpha(\infty, q, r)$, $\alpha(p, 1, 2)$, $\alpha(p, \infty, 2)$.

On remarque qu'il y a des problèmes ouverts : le principal est de savoir si $\alpha(p, q, r) = \alpha(p, q, q)$ quand $rp + r - 1 < q \leq (2r - 1)p$. Ceci est le cas (voir [28]) si $r = 2$.

1.0.2 Deuxième partie : quelques inclusions différentielles

Nous allons étudier des problèmes de Dirichlet relatifs à des inclusions différentielles vectorielles de premier et de deuxième ordre. Le problème modèle pour le premier ordre sera

$$\begin{cases} Du \in E & \text{p.p. dans}\, \Omega \\ u(x) = \varphi(x) & x \in \partial\Omega; \end{cases}$$

pour le deuxième ordre

$$\begin{cases} D^2u \in E & \text{p.p. dans}\, \Omega \\ u(x) = \varphi(x) & x \in \partial\Omega \\ Du(x) = D\varphi(x) & x \in \partial\Omega\,, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, E est un ensemble de $\mathbb{R}^{m\times n}$ et $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ sera une fonction donnée suffisamment régulière. On cherchera des solutions $u \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ et $W^{2,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ respectivement.

On remarque que n'importe quel système d'équations aux dérivées partielles du type

$$F_i(Du) = 0, \;\; i = 1, 2, ...I$$

ou

$$F_i(D^2u) = 0, \;\; i = 1, 2, ...I$$

peut être écrit sous la forme d'inclusion différentielle : en fait il suffit de définir

$$E = \{\xi : F_i(\xi) = 0, i = 1, 2, ...I\}$$

et on aura que les deux systèmes écrits ci-dessus sont équivalents, respectivement à

$$Du \in E$$

et

$$D^2u \in E\,.$$

Le problème de l'existence de solutions de ce type d'inclusions différentielles dans sa généralité a été étudié à partir des années '80 par différents mathématiciens. En particulier on peut dire que deux grandes (différentes) théories ont été développées par Dacorogna-Marcellini [12] et par Müller-Šverák [27], qui ont démontré des théorèmes d'existence très généraux.

Pour donner l'idée des ces résultats, il faut comprendre qu'un rôle central est joué par l'enveloppe rang un convexe de l'ensemble E (pour la définition voir chapitre 3) qui définit l'inclusion différentielle. Voyons pourquoi. Comme dans les problèmes scalaires une condition suffisante pour l'existence de solutions (et presque nécessaire, voir [12]) est que la fonction au bord satisfasse $D\varphi \in \operatorname{int}\operatorname{co} E$, dans les problèmes vectoriels une condition suffisante que la fonction φ doit satisfaire pour avoir l'existence de solutions semble être liée à la quasiconvexité, et plus précisément elle semble être

$$D\varphi \in E \cup \mathrm{int}\overline{\mathrm{Qco}E}\,,$$

où $\overline{\mathrm{Qco}E}$ dénote l'enveloppe quasiconvexe de l'ensemble E (voir la définition dans le chapitre 3). Malheureusement il n'existe pas des résultats de ce type là, puisque en général la notion de quasiconvexité n'a pas été comprise complètement. Cependant des résultats d'existence ont été établis, en utilisant une notion plus faible de la quasiconvexité : la rang un convexité. En fait les théories qu'on a citées au début (formulées par Dacorogna-Marcellini et Müller-Šverák) établissent en gros qu'une condition suffisante (entre autres) est

$$D\varphi \in \mathrm{intRco}E\,,$$

où $\mathrm{Rco}E$ dénote l'enveloppe rang un convexe de l'ensemble E (voir chapitre 3 pour la définition). On remarque que l'enveloppe rang un convexe est un ensemble plus petit de l'enveloppe quasiconvexe.

À l'aide de ces théorèmes nous avons pu établir des résultats d'existence relatifs à deux problèmes qu'on va maintenant présenter.

Tout d'abord on va étudier un problème de premier ordre : il est typique dans les microstructures et dans les transitions de phase des cristaux. On dénotera par $\mathcal{O}(2)$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathbb{R}^2$.

Problème 1.0.2. *Il s'agit de trouver une application $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que*

$$\begin{cases} Du \in E & p.p. \text{ dans } \Omega \\ u(x) = \varphi(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

où E est un ensemble isotrope compact de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, c'est à dire que E satisfait la propriété que si $\xi \in E$ alors $R\xi S \in E$ pour toute $R, S \in \mathcal{O}(2)$.

Comme on a dit, ce problème est lié aux microstructures : en fait on rappelle que l'étude de la minimisation d'énergie nécessaire pour la déformation d'un cristal élastique est liée souvent à l'étude d'inclusions différentielles définies pour des ensembles E invariants par rotations (voir par exemple [26]).

On va maintenant présenter le résultat d'existence que nous avons établi. Pour ceci il est utile d'écrire différemment l'ensemble E. Dans une façon équivalente si K est un compact contenu dans $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$ on a que

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K\}$$

où par $\lambda_1(\xi) \leq \lambda_2(\xi)$ on dénote les valeurs singulières de la matrice ξ, c'est à dire les valeurs propres de la matrice $\sqrt{\xi\xi^T}$ (voir chapitre 4 pour la définition). En fait évidemment tout ensemble isotrope peut être écrit sous la forme précédente.

Pour ce problème on a établi le théorème d'existence suivant :

Théorème 1.0.3. *Soit $K \subset T$ un compact qui satisfait l'hypothèse*

$$\forall\, (x, y) \in K, x > 0.$$

Soit

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K\}.$$

Soit $\varphi \in C^1_{morc}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ telle que $D\varphi(x)$ satisfait $\forall\, \theta \in [0, \max_{(x,y)\in K} y]$

$$\lambda_1(D\varphi)\lambda_2(D\varphi) + \theta(\lambda_2(D\varphi) - \lambda_1(D\varphi)) < \max_{(x,y)\in K} xy + \theta(y - x) \tag{1.1}$$

dans Ω. Alors il existe une application $u \in \varphi + W^{1,\infty}_0(\Omega, \mathbb{R}^2)$ solution du problème 1.0.2.

On va maintenant présenter le deuxième problème qu'on a étudié : il est un problème de deuxième ordre.

Problème 1.0.4. *Il s'agit de trouver une fonction $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{cases} D^2u \in E & p.p. \text{ dans } \Omega \\ u(x) = \varphi(x) & x \in \partial\Omega \\ Du(x) = D\varphi(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

où

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}_s : |\xi_{ij}| = a_{ij}, a_{ij} > 0,\ i, j = 1, 2\}\,,$$

avec $a_{ij} > 0$ pour $i, j = 1, 2$ et $a_{12} = a_{21}$.

On remarque que ce problème peut être écrit sous forme de système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right| = a_{ij} & \text{p.p. dans } \Omega,\ i,j = 1,2\,, \\ u(x) = \varphi(x) & x \in \partial\Omega\,, \\ Du(x) = D\varphi(x) & x \in \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Évidemment, même si ce problème est scalaire (on cherche une solution qui est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$), comme il est de deuxième ordre, il est équivalent à un problème de premier ordre vectoriel, ce qui nous a conduit à le traiter avec les techniques typiques des problèmes vectoriels.

Pour ce problème on a montré un résultat d'existence sous l'hypothèse $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$:

Théorème 1.0.5. *Soient $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ et $\varphi \in C^2_{morc}(\bar{\Omega})$ telle que $D^2\varphi(x)$ satisfait dans Ω*

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right| < a_{ij},\ i,j = 1,2\,, \\ \left|a_{22}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - a_{11}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}\right| < -\det D^2\varphi + a_{11}a_{22} - a_{12}^2\,, \\ \left|a_{22}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + a_{11}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}\right| < 2\left|\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}\right| a_{12} + \det D^2\varphi + a_{11}a_{22} - a_{12}^2\,. \end{cases} \tag{1.2}$$

Alors il existe $u \in \varphi + W_0^{2,\infty}(\Omega) : D^2u \in E$ p.p. dans Ω.

On voudrait remarquer qu'en particulier on montre que si $0 < a_{12} < 1$ alors il existe $u \in W_0^{2,\infty}(\Omega)$ tel que

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right| = \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right| = 1\,, \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right| = a_{12}\,.$$

On montrera dans les chapitres 4 et 5 que les matrices qui satisfont les relations (1.1) ou (1.2) définissent l'intérieur de l'enveloppe rang un convexe de l'ensemble E.

Première partie

Un problème de minimisation

Chapitre 2

Une généralisation de l'inégalité de Wirtinger

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier le problème suivant de minimisation : le calcul de la constante

$$\alpha(p,q,r)=\inf\left\{\frac{\|u'\|_p}{\|u\|_q}:u\in W^{1,p}_{pér}(-1,1)\setminus\{0\}\,,\ \int_{-1}^{1}|u|^{r-2}\,u=0\right\}$$

où $p,q>1$, $q\geq r-1\geq 1$ et

$$\|u\|_q=\left(\int_{-1}^{1}|u|^q\right)^{1/q},$$
$$W^{1,p}_{pér}(-1,1)=\left\{u\in W^{1,p}(-1,1):u(-1)=u(1)\right\}.$$

Ce problème est une généralisation de l'inégalité de Wirtinger, c'est à dire

$$\|u'\|_2\geq\pi\|u\|_2,\quad\forall\ u\in W^{1,2}_{pér}(-1,1):\int_{-1}^{1}u=0$$

(en fait $p=q=r=2$) ; on rappelle aussi que cette dernière constante est liée au problème isopérimétrique classique

$$[L(\partial A)]^2\geq 4\pi mes(A)$$

où $A\subseteq\mathbb{R}^2$ est un ensemble suffisamment régulier de bord ∂A, $L(\partial A)$ est la longueur du bord de A et $mes(A)$ est la mesure de Lebesgue de l'ensemble A.

Récemment plusieurs généralisations de l'inégalité de Wirtinger ont été faites :

- Dacorogna-Pfister [13] ont calculé $\alpha(p,p',p')$.
- Dacorogna-Gangbo-Subía [10], ont analysé les cas $r=q$ et $r=2$. Ils ont calculé la valeur de $\alpha(p,q,q)$ en montrant aussi que si $q\leq 2p$ alors $\alpha(p,q,2)=\alpha(p,q,q)$; par contre si $q>>2p$ nous avons l'inégalité stricte.
- Belloni-Kawohl [3] et Kawohl [22] ont amélioré le cas $r=2$, en prouvant que $\alpha(p,q,2)=\alpha(p,q,q)$ si $q\leq 2p+1$.

• Buslaev-Kondratiev-Nazarov [6] ont montré que nous avons l'inégalité stricte si $q > 3p$; après Nazarov [28] a montré qu'on a l'inégalité stricte si et seulement si $q > 3p$.

On remarque que l'importance du calcul des ces constantes est si $r = q$ la généralisation du théorème de Wulff, une inégalité isopérimetrique : plus précisément la recherche de la meilleure constante C dans l'inégalité

$$[F(\partial A)]^2 - Cmes(A) \geq 0$$

où A est un ensemble suffisamment régulier de bord ∂A, et

$$F(\partial A) = \int_{-1}^{1} [|x'(t)|^p + |y'(t)|^p]^{\frac{1}{p}} dt$$

si $(x(t), y(t)), t \in (-1, 1)$ est une paramétrisation de ∂A (voir[13]). Si $r = 2$ ces constantes sont utilisées dans divers contextes (voir par exemple [17], [24], [25] et [29]) de problèmes de valeurs propres d'opérateurs elliptiques.

Dans cette thèse nous allons présenter la généralisation et l'unification des résultats existants par l'introduction du paramètre r. Nous allons maintenant énoncer le théorème principal de ce chapitre.

On pose p' l'exposant conjugué de p (c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) et la fonction Beta (voir [1] page 5 et [35] chapitre 12)

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}.$$

On a montré que

Théorème 2.1.1. *Soient $p > 1$, $q \geq r - 1 \geq 1$, $q > 1$; alors*

$$\alpha(p, q, r) = \alpha(p, q, q) \quad si\ q \leq rp + r - 1$$
$$\alpha(p, q, r) < \alpha(p, q, q) \quad si\ q > (2r - 1)\,p.$$

De plus

$$\alpha(p, q, q) = 2\left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{2}{p' + q}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} B\left(\frac{1}{p'}, \frac{1}{q}\right).$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\alpha(\infty, q, r) &= 2^{\frac{1}{q'}}(q + 1)^{\frac{1}{q}} \quad si\ q \geq r - 1 \geq 1,\ q > 1;\\
\alpha(p, 1, 2) &= 2^{\frac{1}{p}}(p' + 1)^{\frac{1}{p'}} \quad si\ p > 1;\\
\alpha(p, \infty, 2) &= 2^{\frac{1}{p}}(p' + 1)^{\frac{1}{p'}} \quad si\ p > 1\,.
\end{aligned}$$

On remarque que ce résultat permet de calculer aussi la constante

$$\alpha(p, q, r, a, b) = \inf\left\{\frac{\|u'\|_{L^p(a,b)}}{\|u\|_{L^q(a,b)}}, u \in W^{1,p}_{pér}(a, b) \setminus \{0\}, \int_a^b |u|^{r-2}u = 0\right\}.$$

En fait on peut montrer facilement (voir lemme 2.2.7) que

$$\alpha(p, q, r, a, b) = \left(\frac{2}{b - a}\right)^{\frac{1}{p'} + \frac{1}{q}} \alpha(p, q, r).$$

On voudrait terminer cette introduction en soulignant les problèmes ouverts : on remarque tout de suite qu'on n'a pas généralisé complètement les résultats existants en montrant que

$$\alpha(p, q, r) < \alpha(p, q, q) \Longleftrightarrow q > (2r - 1)p,$$

alors que dans le cas $r = 2$ on a que

$$\alpha(p, q, 2) < \alpha(p, q, q) \Longleftrightarrow q > 3p\,;$$

des essais numériques semblent indiquer que le résultat est vrai. La question principale reste en tout cas le fait qu'on sait pas calculer $\alpha(p, q, r)$ si $q > (2r-1)p$.

Une question naturelle est : pour quel $r \in [2, q + 1]$ le $\min\limits_{r\in[2,q+1]} \alpha(p, q, r)$ est atteint ; du théorème on peut déduire que

$$\max_{r\in[2,q+1]} \alpha(p, q, r) = \alpha(p, q, q)\,.$$

Par ailleurs dans l'Appendice on donne un argument qui semble suggérer que la condition $r \geq 2$ peut être affaiblie à $r > 1$; mais nous n'avons pas été capable de démontrer complètement le théorème quand $r > 1$.

2.2 Préliminaires

Dans cette section on va montrer la proposition suivante. Elle nous sera très utile, parce qu'elle nous permettra de réduire notre problème de minimisation défini sur l'espace des fonctions de $W^{1,p}_{pér}(-1, 1)$ telles que $\int_{-1}^{1} |u|^{r-2}u = 0$ à un problème de minimisation sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.2.1. *Soient $p > 1,\ q \geq r - 1 \geq 1,\ q > 1$. Soient $F, M : (0, 1] \to \mathbb{R}$ définies par*

$$M(m) = 2\left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} \left[\frac{q(p-1)+p}{2p\,s(m)}\right]^{\frac{p'+q}{p'q}} \int_{-m}^{1} \left[1 - |z|^q - r(m)[1 - |z|^{r-2}z]\right]^{\frac{1}{p'}} dz\,,$$

$$F(m) = \int_{-m}^{1} \frac{|z|^{r-2}\,z}{\left[1 - r(m) + r(m)\,|z|^{r-2}\,z - |z|^q\right]^{1/p}} dz\,,$$

où

$$r(m) = \frac{1 - m^q}{1 + m^{r-1}} \quad \textit{et} \quad s(m) = 1 - r(m).$$

Alors

$$\alpha(p, q, r) = \inf\{M(m) : m \in (0, 1] \ \textit{ et } F(m) = 0\}\,.$$

On va diviser la preuve de cette proposition en plusieurs parties. On supposera dans tous les résultats qu'on va montrer que $p > 1,\ q \geq r - 1 \geq 1,\ q > 1$.

Proposition 2.2.2. *Il existe $u \in W_0^{1,p}(-1, 1) \setminus \{0\}$ telle que*

$$\|u'\|_p^p = \alpha^p \|u\|_q^p \ \textit{ et } \int_{-1}^{1} |u|^{r-2}u = 0\,.$$

Telle fonction $u \in C^1[-1,1]$ *; de plus* $|u'|^{p-2}u' \in C^1[-1,1]$ *; par ailleurs* u *satisfait les deux équations suivantes pour* $x \in [-1,1]$ *:*

$$-p(|u'(x)|^{p-2}u'(x))' - \alpha^p p\|u\|_q^{p-q}|u(x)|^{q-2}u(x) + \mu(r-1)|u(x)|^{r-2} = 0$$

$$(p-1)|u'(x)|^p - \mu|u(x)|^{r-2}u(x) + \alpha^p \frac{p}{q}\|u\|_q^{p-q}|u(x)|^q = \mathit{constante}\,, \qquad (2.1)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$.

Démonstration. La preuve de cette proposition sera divisée en plusieurs étapes. Dans la première on va montrer qu'il existe $u \in W_0^{1,p}(-1,1) \setminus \{0\}$ telle que

$$\|u'\|_p^p = \alpha^p \|u\|_q^p \ \text{ et } \int_{-1}^1 |u|^{r-2}u = 0\,.$$

Dans la deuxième on prouvera que $u \in C^1[-1,1]$ et que $|u'|^{p-2}u' \in C^1[-1,1]$ et que u satisfait pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$

$$-p(|u'|^{p-2}u')' = \alpha^p\, p\,\|u\|_q^{p-q}|u|^{q-2}u - \mu(r-1)\,|u|^{r-2}\,.$$

Dans la troisième on prouvera que u satisfait

$$(p-1)|u'(x)|^p - \mu|u(x)|^{r-2}u(x) + \alpha^p\frac{p}{q}\|u\|_q^{p-q}|u(x)|^q = \text{constante}\,.$$

Étape 1 : On va montrer qu'il existe $u \in W_0^{1,p}(-1,1) \setminus \{0\}$ telle que

$$\|u'\|_p^p = \alpha^p \|u\|_q^p \ \text{ et } \int_{-1}^1 |u|^{r-2}u = 0\,.$$

On définit $H_a(v) = \|v'\|_p^p - a\|v\|_q^p$, avec $a \in \mathbb{R}$, $G(v) = \int_{-1}^1 |v|^{r-2}v$ et $\mathcal{W} = \{v \in W^{1,p}_{pér}(-1,1) \setminus \{0\}, t.q.\, G(v) = 0\}$. On va montrer que, si $\varepsilon > 0$

$$\inf\{H_{\alpha^p+\varepsilon}(v), v \in W^{1,p}_{pér}(-1,1)\,, G(v) = 0\} = -\infty\,. \qquad (2.2)$$

Sûrement on peut dire qu'il existe u_0 telle que $H_{\alpha^p+\varepsilon}(u_0) < 0$: en fait si $H_{\alpha^p+\varepsilon}(u) \geq 0$ pour tout $u \in \mathcal{W}$

$$\begin{aligned}\varepsilon\|u\|_q^p &\leq H_{\alpha^p+\varepsilon}(u) + \varepsilon\|u\|_q^p = \|u'\|_p^p - (\alpha^p+\varepsilon)\|u\|_q^p + \varepsilon\|u\|_q^p \\ &= \|u\|_q^p\left(\frac{\|u'\|_p^p}{\|u\|_q^p} - \alpha^p\right)\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\|u'\|_p^p}{\|u\|_q^p} - \alpha^p \geq \varepsilon\,.$$

En passant à l'inf sur les fonctions de $\mathcal{W}$, de la dernière inégalité on a $0 \geq \varepsilon$, qui est absurde. Alors maintenant il suffit de calculer la $\lim\limits_{t\to\infty} H_{\alpha^p+\varepsilon}(tu_0)$ pour obtenir (2.2). Par définition de inf on peut dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $u_\varepsilon \in W^{1,p}_{pér}(-1,1)$ telle que $G(u_\varepsilon) = 0$ et $H_{\alpha^p+\varepsilon}(u_\varepsilon) < 0$: ceci implique que u_ε n'est pas constante.

Sans perte de généralité on peut prendre $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(-1,1)$: en fait si $\alpha_1(\varepsilon) = \inf\{x \in [-1,1] : u_\varepsilon(x) = 0\}$ on pose

$$\bar{u}_\varepsilon(x) = \begin{cases} u_\varepsilon(x+\alpha_1(\varepsilon)+1), & \text{si } -1 \le x \le -\alpha_1(\varepsilon) \\ u_\varepsilon(x+\alpha_1(\varepsilon)-1), & \text{si } -\alpha_1(\varepsilon) \le x \le 1\,. \end{cases}$$

On observe que $\bar{u}_\varepsilon(-1) = u_\varepsilon(\alpha_1) = 0 = \bar{u}_\varepsilon(1)$; par ailleurs en faisant les changements de variable $x+\alpha_1(\varepsilon)+1 = t$, si $-1 \le x \le -\alpha_1$ et $x+\alpha_1(\varepsilon)-1 = t$, si $-\alpha_1 \le x \le 1$ on obtient

$$\int_{-1}^{1} |\bar{u}_\varepsilon(x)|^{r-2}\bar{u}_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\alpha_1(\varepsilon)}^{1} |u_\varepsilon(t)|^{r-2}u_\varepsilon(t)\,dt + \int_{-1}^{\alpha_1(\varepsilon)} |u_\varepsilon(t)|^{r-2}u_\varepsilon(t)\,dt = 0.$$

Avec la même technique, c'est à dire en faisant les changements de variable cités ci-dessus on a

$$\frac{\|\bar{u'}_\varepsilon\|_p^p}{\|\bar{u}_\varepsilon\|_q^p} = \frac{\|u'_\varepsilon\|_p^p}{\|u_\varepsilon\|_q^p}\,.$$

On pose $v_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{\|u'_\varepsilon\|_p}$. Alors

$$\|v_\varepsilon\|_{W^{1,p}} = 1 + \frac{\|u_\varepsilon\|_p}{\|u'_\varepsilon\|_p} \le C$$

grâce à l'inégalité de Poincaré. Maintenant on considère $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une sous-suite, notons-la v_n, et il existe $\bar{v} \in W^{1,p}_{pér}(-1,1)$ telles que $v_n \to \bar{v}$ dans $W^{1,p}(-1,1)$ faiblement.

On va maintenant montrer que $H_{\alpha^p}(\bar{v}) = 0$. On observe (par le théorème de Rellich-Kondrachov que $v_n \to \bar{v}$ dans $C^0[-1,1]$: ceci implique que $G(\bar{v}) = 0$, (puisque $G(v_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et que $\bar{v}(-1) = \bar{v}(1) = 0$. Par ailleurs $H_{\alpha^p+\frac{1}{n}}(v_n) < 0$; par conséquent

$$\liminf_{n\to\infty} \|v'_n\|_p^p - \left(\alpha^p + \frac{1}{n}\right)\|v_n\|_q^p \le 0\,.$$

On note que $\liminf_{n\to\infty} \|v'_n\|_p^p \ge \|\bar{v}'\|_p^p$ et $\lim_{n\to\infty} \|v_n\|_q^p = \|\bar{v}\|_q^p$: alors $H_{\alpha^p}(\bar{v}) \le 0$. Par ailleurs, par définition de l'inf $H_{\alpha^p}(\bar{v}) \ge 0$, et donc

$$H_{\alpha^p}(\bar{v}) = 0\,.$$

On va montrer que $\alpha > 0$, et $\bar{v} \ne 0$: on a vu que $H_{\alpha^p+\frac{1}{n}}(v_n) < 0$ et donc

$$\frac{1}{\|u'_n\|_p^p}\left[\|u'_n\|_p^p - \left(\alpha^p + \frac{1}{n}\right)\|u_n\|_q^p\right] < 0,$$

c'est à dire

$$1 < \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)\|v_n\|_q^p\,.$$

En passant à la limite, on obtient $1 \le \alpha^p\|\bar{v}\|_p^p$, qui conclut la démonstration de la première étape.

Étape 2 : Dans cette étape on prouvera que $u \in C^1[-1,1]$, $|u'|^{p-2}u' \in C^1[-1,1]$ et que u satisfait pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$

$$-p(|u'|^{p-2}u')' = \alpha^p\,p\,\|u\|_q^{p-q}|u|^{q-2}u - \mu(r-1)\,|u|^{r-2}\,.$$

Pour ceci il est utile de prouver qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varphi \in C_0^\infty(-1,1)$

$$p\int_{-1}^{1}|u'|^{p-2}u'\varphi' - \alpha^p p\|u\|_q^{p-q}\int_{-1}^{1}|u|^{q-2}u\varphi + \mu(r-1)\int_{-1}^{1}|u|^{r-2}\varphi = 0 \quad (2.3)$$

En fait, soit $\theta \in C_0^\infty(-1,1)$ telle que $(r-1)\int_{-1}^{1}|u|^{r-2}\theta = 1$ (un tel θ existe parce que sinon du lemme fondamental du calcul des variations on déduirait que $u = 0$ p.p. dans [-1,1]). Soit $\varphi \in C_0^\infty(-1,1)$. On définit dans $Q = \{(\varepsilon, t) : |\varepsilon| \leq 1, |t| \leq 1\}$

$$\Phi(\varepsilon,t) = \int_{-1}^{1}|u' + \varepsilon\varphi' + t\theta'|^p - \alpha^p\left[\int_{-1}^{1}|u+\varepsilon\varphi+t\theta|^q\right]^{\frac{p}{q}};$$

$$\psi(\varepsilon,t) = \int_{-1}^{1}|u+\varepsilon\varphi+t\theta|^{r-2}[u+\varepsilon\varphi+t\theta],\ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(-1,1)\,.$$

On observe que Φ est dérivable (parce que $q, p > 1$), ψ aussi pour autant que $r \geq 2$ et $\psi_t(\varepsilon,t) = (r-1)\int_{-1}^{1}|u+\varepsilon\varphi+t\theta|^{r-2}\theta$: donc $\psi_t(0,0) \neq 0$ par le choix de θ. Grâce au théorème des fonctions implicites appliqué à ψ, il existe $\varepsilon_0 << 1$ et une fonction $\tau \in C^1(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$, avec $\tau(0) = 0$ tels que $\psi(\varepsilon,\tau(\varepsilon)) = 0, \forall\varepsilon \in (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$, et $\tau'(0) = -\psi_\varepsilon(0,0)$. Par ailleurs par définition de minimum on a

$$\Phi(\varepsilon,\tau(\varepsilon)) \geq \Phi(0,0),$$

et donc $(0,0)$ satisfait $\Phi_\varepsilon(0,0) + \Phi_t(0,0)\tau'(0) = 0$. On va écrire cette relation explicitement :

$$\begin{aligned}
&\Phi_\varepsilon(\varepsilon,t) = p\int_{-1}^{1}|u'+\varepsilon\varphi'+t\theta'|^{p-2}[u'+\varepsilon\varphi'+t\theta']\varphi' \\
&-\alpha^p p\left[\int_{-1}^{1}|u+\varepsilon\varphi+t\theta|^q\right]^{\frac{p-q}{q}}\int_{-1}^{1}|u+\varepsilon\varphi+t\theta|^{q-2}[u+\varepsilon\varphi+t\theta]\varphi; \\
&\Phi_t(\varepsilon,t) = p\int_{-1}^{1}|u'+\varepsilon\varphi'+t\theta'|^{p-2}[u'+\varepsilon\varphi'+t\theta']\theta' \\
&-\alpha^p p\left[\int_{-1}^{1}|u+\varepsilon\varphi+t\theta|^q\right]^{\frac{p-q}{q}}\int_{-1}^{1}|u+\varepsilon\varphi+t\theta|^{q-2}[u+\varepsilon\varphi+t\theta]\theta; \\
&\psi_\varepsilon(\varepsilon,t) = (r-1)\int_{-1}^{1}|u+\varepsilon\varphi+t\theta|^{r-2}\varphi
\end{aligned} \quad (2.4)$$

et donc pour $(\varepsilon,t) = (0,0)$

$$\Phi_\varepsilon(0,0) = p\int_{-1}^{1}|u'|^{p-2}u'\varphi' - \alpha^p p\|u\|_q^{p-q}\int_{-1}^{1}|u|^{q-2}u\varphi$$

$$\Phi_t(0,0) = p\int_{-1}^{1}|u'|^{p-2}u'\theta' - \alpha^p p\|u\|_q^{p-q}\int_{-1}^{1}|u|^{q-2}u\theta$$

$$\tau'(0) = -\psi_\varepsilon(0,0) = -(r-1)\int_{-1}^{1}|u|^{r-2}\varphi\,.$$

Ainsi $\forall\varphi \in C_0^\infty(-1,1)$

$$p\int_{-1}^{1}|u'|^{p-2}u'\,\varphi' - \alpha^p\,p\,\|u\|_q^{p-q}\int_{-1}^{1}|u|^{q-2}u\,\varphi + \mu(r-1)\int_{-1}^{1}|u|^{r-2}\,\varphi = 0\,,$$

où $\mu = -\Phi_t(0,0)$.
De cette équation suit tout de suite la conclusion de la deuxième étape. En fait, en intégrant par parties l'équation précédente on obtient :

$$-p\int_{-1}^{1}(|u'|^{p-2}u')'\,\varphi = \alpha^p\,p\,\|u\|_q^{p-q}\int_{-1}^{1}|u|^{q-2}u\,\varphi - \mu(r-1)\int_{-1}^{1}|u|^{r-2}\,\varphi\,.$$

Grâce au lemme fondamental du calcul des variations

$$-p(|u'|^{p-2}u')' = \alpha^p\,p\,\|u\|_q^{p-q}|u|^{q-2}u - \mu(r-1)\,|u|^{r-2} \tag{2.5}$$

p.p. dans $(-1,1)$. Puisque le membre de gauche de (2.5) est continu, alors $(|u'|^{p-2}u')'$ est continue, et $|u'|^{p-2}u'$ aussi. Donc (2.5) est vrai pour tout $x \in [-1,1]$. En observant que l'inverse de la fonction $g(t) = |t|^{p-2}t$ est continue, on a que u est $C^1[-1,1]$.

Étape 3 : Dans cette étape on prouvera que u satisfait pour $x \in [-1,1]$

$$(p-1)|u'(x)|^p - \mu|u(x)|^{r-2}u(x) + \alpha^p\frac{p}{q}\|u\|_q^{p-q}|u(x)|^q = \text{constante}\,.$$

En multipliant par u' l'équation (2.5) et en intégrant dans $[-1,x]$, $x \in [-1,1]$ on a

$$-\int_{-1}^{x}p(|u'|^{p-2}u')'u' - \alpha^p p\|u\|_q^{p-q}\int_{-1}^{x}|u|^{q-2}uu' + \mu(r-1)\int_{-1}^{x}|u|^{r-2}u' = 0\,. \tag{2.6}$$

Nous allons montrer que $(|u'|^{p-2}u')'u' = \frac{1}{p'}(|u'|^p)'$. Si $u \in C^2$ le résultat est évident, mais comme u est seulement C^1 ceci requiert une démonstration. La fonction $G(s) = |s|^{p'}$ est $C^1(\mathbb{R})$ parce que $p' > 1$; si $v \in C^1[-1,1]$ on a donc $G \circ v \in C^1$ et $(G \circ v)' = G'(v)v'$. Observons que $G'(s) = p'|s|^{\frac{2-p}{p-1}}s$, et donc, si $v = |u'|^{p-2}u'$ on a $G'(v) = p'\left||u'|^{p-2}u'\right|^{\frac{2-p}{p-1}}|u'|^{p-2}u' = p'u'$; de plus $G(v) = |u'|^p$. On obtient par conséquent

$$(|u'|^{p-2}u')'u' = \frac{1}{p'}(|u'|^p)'. \tag{2.7}$$

La relation (2.6) devient ainsi

$$(p-1)|u'(x)|^p - \mu|u(x)|^{r-2}u(x) + \alpha^p\frac{p}{q}\|u\|_q^{p-q}|u(x)|^q = \text{constante}\,.$$

□

Remarque 2.2.3. *Pour dériver l'équation (2.3) on a besoin que $r \geq 2$, mais dans presque toute la preuve du théorème 2.1.1 on a besoin uniquement de la forme intégrée de l'équation d'Euler, qui elle peut être obtenue directement même si $r > 1$ (c.f. Appendice). On a utilisé que $r \geq 2$ (pour pouvoir déduire que $u \in C^1[-1,1]$) seulement dans le corollaire suivant et dans la première étape de la proposition 2.2.5.*

Corollaire 2.2.4. *Il existe $u \in W_0^{1,p}(-1,1)\setminus\{0\}$ telle que*

$$\|u'\|_p^p = \alpha^p\|u\|_q^p \ \text{ et } \int_{-1}^{1}|u|^{r-2}u = 0\,,$$
$$\max u(x) = \max|u(x)| = 1,\ \min u(x) = -m, m \in (0,1].$$

Par ailleurs si

$$r(m) = \frac{1-m^q}{1+m^{r-1}}\,,\ s(m) = 1 - r(m)\,,$$

alors

$$|u'(x)|^p = \alpha^p \frac{p'}{q} \|u\|_q^{p-q} [r(m)|u(x)|^{r-2}u(x) - |u(x)|^q + s(m)]; \tag{2.8}$$

$$\|u\|_q^q = \frac{2ps(m)}{q(p-1)+p}\,. \tag{2.9}$$

Démonstration. Soit u la fonction trouvée dans la proposition précédente. On peut supposer sans perte de généralité (parce que le rapport $\frac{\|u'\|_p}{\|u\|_q}$ est homogène de degrés 1) que

$$\max u(x) = \max |u(x)| = 1,\ \min u(x) = -m, m \in (0,1].$$

On va montrer maintenant les équations (2.8) et (2.9). On écrit (2.1) pour un point x_0 tel que $u(x_0) = 1$ (et $u'(x_0) = 0$, comme $u \in C^1$) :

$$-\mu + \alpha^p \frac{p}{q} \|u\|_q^{p-q} = constante;$$

si on l'écrit pour un point x_1 tel que $u(x_1) = -m$, (et $u'(x_1) = 0$) on obtient

$$\mu|m|^{r-2}m + \alpha^p \frac{p}{q} \|u\|_q^{p-q} |m|^q = constante;$$

donc

$$-\mu + \alpha^p \frac{p}{q} \|u\|_q^{p-q} = \mu m^{r-1} + \alpha^p \frac{p}{q} \|u\|_q^{p-q} m^q$$

c'est à dire

$$\mu = \alpha^p \frac{p}{q} \|u\|_q^{p-q} r(m).$$

Alors (2.1) devient

$$|u'(x)|^p - \alpha^p \frac{p'}{q} \|u\|_q^{p-q} r(m)|u(x)|^{r-2}u(x) + \alpha^p \frac{p'}{q} \|u\|_q^{p-q} |u(x)|^q = c_1\,. \tag{2.10}$$

En écrivant la dernière relation pour un point x_1 tel que $u(x_1) = -m$, (et $u'(x_1) = 0$) on a

$$c_1 = \alpha^p \frac{p'}{q} \|u\|_q^{p-q} (m^q + r(m)m^{r-1}) = \alpha^p \frac{p'}{q} \|u\|_q^{p-q} s(m)\,.$$

En combinant cette égalité et (2.10) on a (2.8). En intégrant (2.8) sur $[-1,1]$ on obtient

$$\alpha^p \|u\|_q^p + \alpha^p \frac{p'}{q} \|u\|_q^p = 2\alpha^p \frac{p'}{q} \|u\|_q^{p-q} s(m)$$

et par conséquent

$$\|u\|_q^q = \frac{2ps(m)}{q(p-1)+p}.$$

□

Dans la proposition suivante on va analyser les zéros des fonctions u et u'.

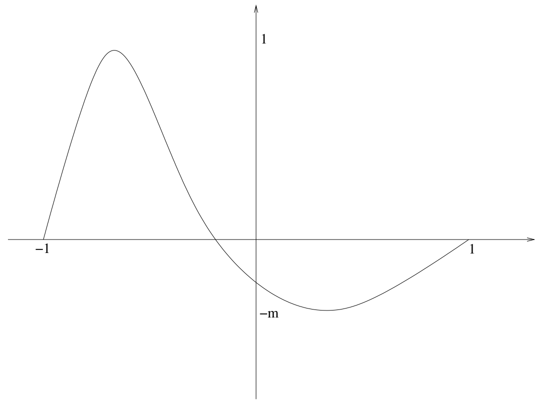


FIG. 2.1 – Fonction u

Proposition 2.2.5. *La fonction u trouvée dans la proposition 2.2.2 a trois zéros : $\alpha_1 = -1 < \alpha_2 < \alpha_3 = 1$. La fonction u' a deux zéros en $\eta_1 = \frac{\alpha_2-1}{2}$ et $\eta_2 = \frac{\alpha_2+1}{2}$. De plus $u(x) = u(2\eta_1 - x)$, si $x \in (-1, \alpha_2)$ et $u(x) = u(2\eta_2 - x)$, si $x \in (\alpha_2, 1)$.*

Dans la suite on choisira le u c.f. dessin ci-dessus.

Remarque 2.2.6. *On observe que de (2.1) on peut déduire que $|u'(-1)| = |u'(1)|$. En fait il suffit de l'écrire pour $x = -1$ et $x = 1$. Grâce à la proposition précédente $u'(-1) = u'(1)$ nécessairement; or, si $q = r$ en intégrant (2.5) sur $[-1, 1]$, on obtient $\mu(r-1)\int_{-1}^{1} |u|^{r-2} = 0$, c'est à dire $\mu = 0$. On retrouve alors le résultat de [10].*

Il nous sera utile le lemme suivant

Lemme 2.2.7. *Si on pose*

$$\alpha(p, q, r, a, b) = \inf\left\{ \frac{\|u'\|_{L^p(a,b)}}{\|u\|_{L^q(a,b)}}, u \in W^{1,p}_{p\acute{e}r}(a, b) \setminus \{0\}, \int_a^b |u|^{r-2}u = 0 \right\},$$

alors

$$\alpha(p, q, r, a, b) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}} \alpha(p, q, r).$$

Démonstration. Soit $u \in W^{1,p}_{p\acute{e}r}(a, b)$ telle que $\int_a^b |u|^{r-2}u = 0$. En faisant le changement de variable $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$ on obtient

$$\int_a^b |u'(x)|^p \, dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} \left| u'\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right)\right|^p dt,$$

$$\int_a^b |u(x)|^q \, dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} \left| u\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt$$

et

$$0 = \int_a^b |u(x)|^{r-2}u(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} \left| u\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right)\right|^{r-2} u\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right) dt;$$

En posant $u\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}\right)=v(t)$ on obtient

$$\int_a^b |u'(x)|^p\,dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{1-p}\int_{-1}^1 |v'(t)|^p\,dt$$

$$\int_a^b |u(x)|^q\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 |v(t)|^q\,dt$$

$$\int_{-1}^1 |v(t)|^{r-2}v(t)\,dt = 0;$$

donc on a

$$\frac{\|u'\|_{L^p(a,b)}}{\|u\|_{L^q(a,b)}} = \frac{\|v'\|_{L^p(-1,1)}}{\|v\|_{L^q(-1,1)}}\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}}.$$

En passant à l'inf, la dernière relation implique que

$$\alpha(p,q,r,a,b) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}}\alpha(p,q,r).$$

□

Démonstration. La preuve de cette proposition est divisée en plusieurs étapes.
Étape 1 Dans cette étape on va montrer que si u est la fonction trouvée dans la proposition 2.2.2 alors
a) $u'(x)=0$ si et seulement si $u(x)=1$ ou $u(x)=-m$;
b) u admet un nombre fini de zéros ;
c) si $\alpha_1=-1,..\alpha_n=1$ sont les zéros de u, alors $\exists!\,\eta_j\in(\alpha_j,\alpha_{j+1})$ tel que $u'(\eta_j)=0$.
a) Sûrement si $u(x)=1$ ou $u(x)=-m$ alors $u'(x)=0$, parce que $u\in C^1[-1,1]$.
Vice-versa, soit $u'(x)=0$; supposons que $u(x)\geq 0$; de (2.8) on déduit que

$$r(m)[u(x)]^{r-1}-[u(x)]^q+s(m)=0\,.$$

Si on pose $u(x)=t$ il faut étudier l'équation en $t\geq 0$

$$r(m)t^{r-1}-t^q+s(m)=0\,,$$

et montrer qu'elle admet exactement la solution $t=1$ .On remarque que pour t tel que $t^{q+1-r}\geq r(m)$ cette équation n'admet pas de solutions parce que $s(m)>0$ (puisque $m>0$) et $r(m)t^{r-1}-t^q\geq 0$. Supposons alors que $t^{q+1-r}>r(m)$.
On pose

$$f(t)=r(m)t^{r-1}-t^q+s(m).$$

Or, $f(1)=0$ et $f'(t)=r(m)(r-1)t^{r-2}-qt^{q-1}$; $f'(t)<0$ si et seulement si $t^{q+1-r}>\frac{r(m)(r-1)}{q}$; cette relation est vérifiée parce qu'on est dans la condition $t^{q+1-r}>r(m)$ et $q\geq r-1$. On conclut que si $u'(x)=0$ (et $u(x)\geq 0$) alors $u(x)=1$.
Le cas $u(x)\leq 0$ est analogue : en fait de (2.8) on déduit que

$$-r(m)[-u(x)]^{r-1}-[-u(x)]^q+s(m)=0\,.$$

On peut supposer que $u(x) < 0$ parce que sinon, si $u(x) = 0$, on aurait $s(m) = 0$ et ceci est impossible comme $m > 0$. Si on pose $-u(x) = t$ il faut étudier l'équation en $t \in (0, m)$

$$-r(m)t^{r-1} - t^q + s(m) = 0\,,$$

et montrer qu'elle admet exactement la solution $t = m$. Sûrement $t = m$ est solution. Par ailleurs, en posant $g(t) = -r(m)t^{r-1} - t^q + s(m)$ on a que $g'(t) < 0$, ce qui implique le résultat.
b) Supposons que le nombre de zéros de u soit infini : alors soient α_n, $n \in \mathbb{N}$ les zéros de u. Grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass il existe α_{n_j} et α_0 tels que $\alpha_{n_j} \to \alpha_0$. Par la continuité de $u(x)$, $u(\alpha_0) = 0$. Par ailleurs

$$u'(\alpha_0) = \lim_{n_j \to \infty} \frac{u(\alpha_{n_j}) - u(\alpha_0)}{\alpha_{n_j} - \alpha_0} = 0 :$$

ceci est une contradiction parce qu'on a vu dans le point a) qu'un zéro de $u(x)$ n'est pas un point critique pour $u(x)$.
c) On va considérer deux zéros consécutifs de $u(x)$. On peut toujours supposer que si $\{\alpha_j\}$ sont le zéros de $u(x)$, alors $u(x) > 0$ si $x \in (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k})$ et $u(x) < 0$ si $x \in (\alpha_{2k}, \alpha_{2k+1})$. On supposera ceci dans tous les lemmes suivants. On va étudier le cas $u(x) \geq 0$. De (2.8) on déduit que $|u'(x)|$ a la même valeur sur les zéros de $u(x)$; alors $u'(\alpha_{2k-1}) = -u'(\alpha_{2k}) > 0$. Par la continuité de u' il existe η_{2k-1} tel que $u'(\eta_{2k-1}) = 0$; par le point a) $u(\eta_{2k-1}) = 1$. Il faut montrer que η_{2k-1} est unique. Supposons que η_{2k-1} ne soit pas unique ; on peut avoir deux cas :
1)x_1, x_2 sont deux zéros de $u'(x)$ tels que $u(x_1) = u(x_2) = 1$ et $u(x) < 1\ \forall x \in (x_1, x_2)$: c'est impossible parce que alors il y aurait un autre point $x_3 \in (x_1, x_2)$ de minimum local avec $u(x_3) > 0$: ceci est une contradiction par le point a) ;
2)$u(x) = 1\ \forall x \in [c, d] \subset (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k})$: c'est impossible parce que en intégrant (2.5) sur $[c, d]$ on obtient $(1 \leq)\frac{q}{r-1} = r(m)(< 1)$.

Étape 2 Dans cette étape on va montrer que u est périodique de période $\alpha_3 - \alpha_1$, si $\{\alpha_k\}$ sont les zéros de $u(x)$.
Posons

$$z(t) = \left[\alpha^p \frac{p'}{q} \|u\|_q^{p-q}\right]^{\frac{1}{p}} \left[r(m)|t|^{r-2}t - |t|^q + s(m)\right]^{\frac{1}{p}};$$

on peut écrire (2.8) de la manière suivante :

$$|u'(x)| = z(u(x)). \tag{2.11}$$

Considérons, selon les notations du lemme précédent l'intervalle $[\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}]$ où $u(x) \geq 0$. On a $u'(\eta_{2k-1}) = 0$. En faisant le changement de variable $t = u(x)$ on a

$$\int_{\alpha_{2k-1}}^{\eta_{2k-1}} \frac{u'(x)}{z(u(x))} dx = \eta_{2k-1} - \alpha_{2k-1} = \int_0^1 \frac{dt}{z(t)}. \tag{2.12}$$

Avec le même raisonnement, c'est à dire en intégrant (2.11) sur $(\eta_{2k-1}, \alpha_{2k})$ on obtient

$$\int_{\eta_{2k-1}}^{\alpha_{2k}} \frac{-u'(x)}{z(u(x))} dx = \alpha_{2k} - \eta_{2k-1} = \int_0^1 \frac{dt}{z(t)}.$$

Donc si on somme membre par membre les deux relations précédentes on a

$$2\int_0^1 \frac{dt}{z(t)} = \alpha_{2k} - \alpha_{2k-1}$$

qui implique que la différence $\alpha_{2k} - \alpha_{2k-1}$ est indépendante de k. Par ailleurs en remplaçant la dernière identité dans (2.12) on obtient aussi $\eta_{2k-1} = \frac{\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}}{2}$. Dans l'intervalle $[\alpha_{2k}, \alpha_{2k+1}]$ si η_{2k} est tel que $u(\eta_{2k}) = -m$ on aura de manière analogue que $\alpha_{2k+1} - \alpha_{2k}$ est constante, et $\eta_{2k} = \frac{\alpha_{2k}+\alpha_{2k+1}}{2}$.

On va maintenant montrer que u est périodique de période $\alpha_3 - \alpha_1 = \alpha_{2k+1} - \alpha_{2k-1}$. Avec les notations précédentes soit $x \in (\alpha_{2k-1}, \eta_{2k-1})$; alors le changement de variable $u(x) = t$ implique que

$$\int_{\alpha_{2k-1}}^{x} \frac{|u'(x)|}{z(u(x))} dx = x - \alpha_{2k-1} = \int_0^{u(x)} \frac{dt}{z(t)};$$

soit $y \in (\alpha_{2k+1}, \eta_{2k+1})$; alors

$$y - \alpha_{2k+1} = \int_0^{u(y)} \frac{dt}{z(t)}.$$

Maintenant si $x \in (\alpha_{2k-1}, \eta_{2k-1})$, on voit facilement des formules établies ci-dessus que $\alpha_{2k+1} \leq x + \alpha_{2k+1} - \alpha_{2k-1} < \eta_{2k+1}$; par les considérations précédentes

$$\int_0^{u(x+\alpha_{2k+1}-\alpha_{2k-1})} \frac{dt}{z(t)} = x - \alpha_{2k-1} = \int_0^{u(x)} \frac{dt}{z(t)}.$$

Par conséquent, puisque $z(t) \geq 0$, $u(x) = u(x+\alpha_{2k+1}-\alpha_{2k-1}) = u(x+\alpha_3-\alpha_1)$, si $x \in (\alpha_{2k-1}, \eta_{2k-1})$. On peut faire le même raisonnement pour montrer que $u(x) = u(x+\alpha_3-\alpha_1)$, si $x \in (\eta_{2k-1}, \alpha_{2k})$, si $x \in (\alpha_{2k}, \eta_{2k})$, si $x \in (\eta_{2k}, \alpha_{2k+1})$.

Étape 3 Dans cette étape on va montrer que si $\{\alpha_j\}$ sont les zéros de $u(x)$, alors $u(x) = u(\alpha_j + \alpha_{j-1} - x)$ pour tout x dans $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$.
On garde les notations fixées précédemment, c'est à dire $u(x) \geq 0$ dans $[\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}]$ et $u(x) \leq 0$ dans $[\alpha_{2k}, \alpha_{2k+1}]$. On étudie le cas $u(x) \geq 0$ (le cas $u(x) \leq 0$ est analogue). Alors u' est positive dans $[\alpha_{2k-1}, \eta_{2k-1}]$ et négative dans $[\eta_{2k-1}, \alpha_{2k}]$. Si $x \in [\alpha_{2k-1}, \eta_{2k-1}]$

$$\int_{\alpha_{2k-1}}^{x} \frac{|u'(x)|}{z(u(x))} dx = x - \alpha_{2k-1} = \int_0^{u(x)} \frac{dt}{z(t)}.$$

Si $y \in [\eta_{2k-1}, \alpha_{2k}]$

$$-\int_y^{\alpha_{2k}} \frac{u'(x)}{z(u(x))} dx = \alpha_{2k} - y = \int_0^{u(y)} \frac{dt}{z(t)}.$$

Soient $x \in [\alpha_{2k-1}, \eta_{2k-1}]$ et $y = -x + 2\eta_{2k-1}$ ($\in [\eta_{2k-1}, \alpha_{2k}]$ puisque $\eta_{2k-1} = \frac{\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}}{2}$) ; alors

$$\int_0^{u(y)} \frac{dt}{z(t)} = \alpha_{2k} - y = x - \alpha_{2k-1} = \int_0^{u(x)} \frac{dt}{z(t)}.$$

Donc $u(x) = u(-x + 2\eta_{2k-1})$, $\forall x \in [\alpha_{2k-1}, \eta_{2k-1}]$. Si $x \in [\eta_{2k-1}, \alpha_{2k}]$, il existe $y \in [\alpha_{2k-1}, \eta_{2k-1}]$ tel que $x = 2\eta_{2k-1} - y$; donc $u(2\eta_{2k-1} - x) = u(x)$ pour ce qu'on vient de montrer. Ainsi en général on aura $u(x) = u(\alpha_j + \alpha_{j-1} - x)$ pour tout $x \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$.

Étape 4 Dans cette étape on va enfin montrer que u a trois zéros et donc u' a deux zéros.
De la périodicité et de la symétrie de u on déduit que le nombre n des zéros de $u(x)$ est impair. En fait supposons que n soit pair ; alors

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_4 - \alpha_3 = ... = \alpha_{2k} - \alpha_{2k-1} \tag{2.13}$$

$$\alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_5 - \alpha_4 = ... = \alpha_{2k-1} - \alpha_{2k-2} \tag{2.14}$$

Puisque $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_{2k} = 1$ alors de la relation (2.13) on déduit que $\alpha_2 = -\alpha_{2k-1}$. Ceci et (2.14) impliquent que $\alpha_3 = -\alpha_{2k-2}$. Donc, en réiterant le raisonnement, on a que $\alpha_j = -\alpha_{2k-j+1}$. Grâce à l'étape précédente on peut dire que u est une fonction paire. Alors

$$\|u'\|_{L^p(-1,1)} = 2^{\frac{1}{p}} \|u'\|_{L^p(0,1)}$$

et

$$\|u\|_{L^q(-1,1)} = 2^{\frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(0,1)} .$$

Donc par le lemme 2.2.7

$$\begin{aligned} &\alpha(p,q,r) = 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\|u'\|_{L^p(0,1)}}{\|u\|_{L^q(0,1)}} \geq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \alpha(p,q,r,0,1) = 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}} \alpha(p,q,r) \\ &= 2\alpha(p,q,r), \end{aligned}$$

qui est absurde. Ceci implique que $n \geq 3$ est impair, disons $n = 2k + 1$. Donc on peut écrire que

$$[-1, 1] = [-1, \alpha_3] \cup [\alpha_3, \alpha_5] \cup ... \cup [\alpha_{2k-1}, 1] ,$$

et le nombre des intervalles qu'on a écrits est $\frac{n-1}{2} = k$. Ces intervalles ont toutes longueur égale à $\alpha_3 - \alpha_1 = \alpha_{2j+1} - \alpha_{2j-1} = \frac{4}{n-1}$ et donc les points

$$-1, -1 + \frac{4}{n-1}, ...$$

sont des zéros de u. On va maintenant montrer que $n = 3$. Supposons que $n \geq 5$. Alors on pose $v(x) = u\left(\frac{2(x+1)}{n-1} - 1\right)$. On note que $v(-1) = u(-1) = 0$, et $v(1) = u(\frac{4}{n-1} - 1) = u(\frac{5-n}{n-1}) = 0$. La périodicité de u implique que

$$\|v'\|_p^p = \int_{-1}^{\frac{5-n}{n-1}} |u'(y)|^p \left(\frac{2}{n-1}\right)^{p-1} dy = \left(\frac{2}{n-1}\right)^p \|u'\|_p^p$$

et

$$\|v\|_q^q = \frac{n-1}{2} \int_{-1}^{\frac{5-n}{n-1}} |u(y)|^q \, dy = \|u\|_q^q .$$

Donc on a une contradiction, car

$$\frac{\|v'\|_p}{\|v\|_q} = \left(\frac{2}{n-1}\right)\frac{\|u'\|_p}{\|u\|_q} < \frac{\|u'\|_p}{\|u\|_q}.$$

□

Lemme 2.2.8. *Soit u la fonction trouvée dans la proposition 2.2.2. Alors si* $m = -\min_{x\in[-1,1]} u(x)$

a) la condition $\int_{-1}^{1} |u|^{r-2}u = 0$ *implique que*

$$F(m) = \int_{-m}^{1} \frac{|z|^{r-2}\, z}{\left[1 - r(m) + r(m)\,|z|^{r-2}\, z - |z|^q\right]^{1/p}} dz = 0;$$

b) u satisfait

$$\frac{\|u'\|_p}{\|u\|_q} = 2\left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} \left[\frac{q\,(p-1)+p}{2p\, s(m)}\right]^{\frac{p'+q}{p'q}} \int_{-m}^{1} [1 - |z|^q - r(m)[1 - |z|^{r-2}z]]^{\frac{1}{p'}}\, dz\,.$$

Démonstration. a) La symétrie de $u(x)$ entraîne que, si η_1, η_2 sont les deux zéros de $u'(x)$

$$0 = \int_{-1}^{1} |u|^{r-2}u\frac{u'}{u'} = 2\int_{\eta_1}^{\eta_2} |u|^{r-2}u\frac{u'}{u'}.$$

Grâce à (2.8), en faisant le changement de variable $u(x) = t$

$$0 = 2\int_{\eta_1}^{\eta_2} |u|^{r-2}u\frac{u'}{u'} = 2\int_{-m}^{1} \frac{|t|^{r-2}t}{\alpha\left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p}} \|u\|_q^{\frac{p-q}{p}} [s(m) - |t|^q + r(m)|t|^{r-2}t]^{\frac{1}{p}}} dt,$$

donc

$$\int_{-m}^{1} \frac{|z|^{r-2}\, z}{\left[1 - r(m) + r(m)\,|z|^{r-2}\, z - |z|^q\right]^{1/p}} dz = 0.$$

b) La symétrie de $u(x)$ et (2.8) impliquent que

$$\begin{aligned}
\frac{\|u'\|_p^p}{2} &= -\int_{\eta_1}^{\eta_2} |u'(x)|^{p-1}u'(x)\, dx \\
&= -\int_{\eta_1}^{\eta_2} [s(m) - |u(x)|^q + r(m)|u(x)|^{r-2}u(x)]^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{\alpha^p \|u\|_q^{p-q} p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} u'(x) \\
&= \int_{-m}^{1} [s(m) - |t|^q + r(m)|t|^{r-2}t]^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} \left[\frac{\|u'\|_p^p}{\|u\|_q^p}\|u\|_q^{p-q}\right]^{\frac{1}{p'}} dt;
\end{aligned} \tag{2.15}$$

donc

$$\|u'\|_p = 2\int_{-m}^{1} [s(m) - |t|^q + r(m)|t|^{r-2}t]^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} \frac{1}{\|u\|_q^{q/p'}} dt;$$

ainsi en divisant par $\|u\|_q$ et en employant (2.9) on a la conclusion. □

On peut passer maintenant à la démonstration de la proposition principale de cette section.

Démonstration. On va suivre la même demarche que dans [10]. Il faut montrer l'égalité suivante. Soit

$$\beta = \inf\{M(m), m \in (0,1] \; tel \; que \; F(m) = 0\},$$

où

$$M(m) = 2\left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}}\left[\frac{q\,(p-1)+p}{2p\,s(m)}\right]^{\frac{p'+q}{p'q}}\int_{-m}^{1}[1-|z|^q - r(m)[1-|z|^{r-2}z]]^{\frac{1}{p'}}\,dz\,,$$

et $F(m)$ est la fonction définie dans le lemme précédent. Alors

$$\alpha(p,q,r) = \beta.$$

De la définition de β et du lemme précédent on peut dire que $\beta \leq \alpha$. Maintenant on va montrer que $\beta \geq \alpha$. Soit $m \in (0,1]$ tel que $\beta = M(m)$ et $F(m) = 0$. Un tel m existe par la continuité de $F(m)$ et de $M(m)$. Il suffit de montrer qu'il existe une fonction $u \in W^{1,p}_{pér}(-1,1)$, avec $\int_{-1}^{1}|u|^{r-2}u = 0$ telle que $M(m) = \frac{\|u'\|_p}{\|u\|_q}$. On construit cette fonction tout d'abord sur $(-1,0)$. Notons que le problème

$$\begin{cases} u'(x) = \gamma h(u(x)), \; x \in (-1,0) \\ u(0) = 1, u(-1) = -m \\ \max u(x) = \max|u(x)| = 1 \end{cases} \tag{2.16}$$

où $h(s) = [s(m) + r(m)|s|^{r-2}s - |s|^q]^{\frac{1}{p}}$ et $\gamma = \int_{-m}^{1}\frac{ds}{h(s)}$ admet une solution $W^{1,\infty}(0,1)$: en fait si $H : [-m,1] \to [-\gamma,0]$ est la fonction $H(y) = \int_1^y \frac{dx}{h(x)}$, on voit que H est bien définie, continue et strictement croissante, dérivable dans $(-m,1)$ et $H([-m,1]) = [-\gamma,0]$. Alors la fonction H^{-1} est dérivable sur $[-\gamma,0]$; par conséquent $u(x) = H^{-1}(\gamma x)$ est solution de (2.16). On remarque que $u \in C^0([0,1])$, et donc $u \in W^{1,\infty}(0,1)$ comme il est solution du problème (2.16). Puisque m vérifie $F(m) = 0$ alors

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{0}|u|^{r-2}u = \int_{-1}^{0}\frac{|u|^{r-2}uu'}{u'} = \frac{1}{\gamma}\int_{-1}^{0}\frac{|u|^{r-2}uu'}{h(u)} \\ &\frac{1}{\gamma}\int_{-m}^{1}\frac{|t|^{r-2}t}{h(t)}dt = \frac{1}{\gamma}F(m) = 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

On étend par parité la fonction u sur $(0,1)$; alors la nouvelle fonction $u \in W^{1,\infty}(-1,1)$ et $\int_{-1}^{1}|u|^{r-2}u = 0$. On va vérifier que la fonction u ainsi définie satisfait $M(m) = \frac{\|u'\|_p}{\|u\|_q}$. On sait que

$$|u'|^p = \gamma^p[s(m) + r(m)|u|^{r-2}u - |u|^q]; \tag{2.18}$$

donc en intégrant sur $[-1,1]$ on obtient

$$\|u'\|_p^p = \gamma^p[2s(m) - \|u\|_q^q]\,. \tag{2.19}$$

Par ailleurs on voit facilement que $|u'|^{p-2}u' \in W^{1,1}(-1,1)$, comme u est solution de (2.16). Or, si on suit la même demarche faite pour arriver à établir (2.7), on peut dire que $(|u'|^{p-2}u')'u' = \frac{1}{p'}(|u'|^p)'$ presque par tout dans $(-1,1)$. Alors, en dérivant presque par tout, on obtient

$$p'(|u'|^{p-2}u')'u' = \gamma^p[-q|u|^{q-2}uu' + (r-1)r(m)|u|^{r-2}u'] \text{ p.p.}$$

Puisque $u' = 0$ sur un ensemble de mesure nulle

$$p'(|u'|^{p-2}u')' = \gamma^p[-q|u|^{q-2}u + (r-1)r(m)|u|^{r-2}] \text{ p.p.}$$

Si on multiplie par $u(x)$ et on intègre on a

$$\int_{-1}^{1} p'(|u'|^{p-2}u')'u = \int_{-1}^{1} \gamma^p u[-q|u|^{q-2}u + (r-1)r(m)|u|^{r-2}]\,;$$

donc en intégrant par parties

$$p'|u'|^{p-2}u'u|_{-1}^{1} - p'\int_{-1}^{1} |u'|^{p-2}u'u' = -q\gamma^p \int_{-1}^{1} |u|^q.$$

Puisque $u(1) = u(-1) = 0$ par définition de $u(x)$, on a

$$\|u'\|_p^p = \gamma^p \frac{q}{p'}\|u\|_q^q. \tag{2.20}$$

Alors de (2.20) et de (2.19) on obtient $2s(m) - \|u\|_q^q = \frac{q}{p'}\|u\|_q^q$ et donc

$$\|u\|_q^q = \frac{2p's(m)}{q+p'}. \tag{2.21}$$

Par ailleurs puisque u est paire on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\|u'\|_p^p}{2} &= \int_{-1}^{0} |u'|^p = \int_{-1}^{0} |u'|^{p-1}u' \\ &= \gamma^{p-1}\int_{-1}^{0} [h(u)]^{p-1}u' = \gamma^{p-1}\int_{-m}^{1} [h(s)]^{p-1}ds. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Grâce à (2.20)

$$\|u'\|_p^p = \gamma^p \frac{2qs(m)}{q+p'};$$

donc de (2.22) on déduit que $\gamma^{p-1}\displaystyle\int_{-m}^{1} [h(s)]^{p-1}ds = \gamma^p \frac{qs(m)}{q+p'}$, i.e.

$$\gamma = \frac{q+p'}{qs(m)} \int_{-m}^{1} [h(t)]^{p-1}dt;$$

ainsi

$$\|u'\|_p^p = \left[\frac{q+p'}{qs(m)}\right]^{p-1} 2\left[\int_{-m}^{1} [h(t)]^{p-1}\right]^p.$$

En combinant (2.21) et l'identité ci-dessus on a

$$\frac{\|u'\|_p}{\|u\|_q} = 2\left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} \left[\frac{q(p-1)+p}{2ps(m)}\right]^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}} \int_{-m}^{1} [s(m) + r(m)|s|^{r-2}s - |s|^q]^{\frac{1}{p'}}.$$

$\square$

2.3 Démonstration du théorème principal

On va maintenant montrer le théorème 2.1.1. Dans cette section nous allons étudier le cas $p > 1, q \geq r - 1 \geq 1, q > 1$. Les cas limites seront étudiés dans la section suivante.

On va diviser la preuve en plusieurs lemmes.

Lemme 2.3.1. *Soit $F : (0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie dans la proposition 2.2.1. Alors :*
i) F(1)=0.
ii) Si $q \leq rp + r - 1$ alors $m = 1$ est l'unique zéro de $F(m)$.
iii) Si $q > (2r - 1)p$ alors il existe $m < 1$ tel que $F(m) = 0$ et $F(m) < 0$ dans un voisinage de 1.

Démonstration. i) Si $m = 1$ alors $r(m) = 0$, et donc $F(1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{|z|^{r-2} z dz}{[1 - |z|^q]^{\frac{1}{p}}}$.
Puisque l'intégrande est une fonction impaire, $F(1) = 0$.
ii) On récrit $F(m)$:

$$\begin{aligned} F(m) &= \int_{-m}^{0} \frac{|z|^{r-2} z}{\left[s(m) + r(m) |z|^{r-2} z - |z|^q\right]^{1/p}} dz \\ &+ \int_{0}^{1} \frac{|z|^{r-2} z}{\left[s(m) + r(m) |z|^{r-2} z - |z|^q\right]^{1/p}} dz; \end{aligned} \tag{2.23}$$

en faisant le changement de variable $z = -mt$ sur le premier terme on a

$$F(m) = \int_0^1 g_m(t)\, dt,$$

où

$$g_m(t) = \frac{t^{r-1}}{[s(m) + r(m)t^{r-1} - t^q]^{\frac{1}{p}}} - \frac{t^{r-1} m^r}{[s(m) - r(m)(tm)^{r-1} - (mt)^q]^{\frac{1}{p}}}.$$

On va étudier l'inégalité $g_m(t) \geq 0$, dans les cas suivants : a) $q \leq rp$ et b) $rp < q \leq rp + r - 1$.
a) En écrivant les deux termes de $g_m(t)$ avec le même dénominateur et en élevant à la puissance p on voit que $g_m(t) \geq 0$ si et seulement si

$$h_m(t) = s(m)(1 - m^{rp}) - t^{r-1} r(m)(m^{r-1} + m^{rp}) + t^q(m^{rp} - m^q) \geq 0\,.$$

On a que $h_m(0) = s(m)(1 - m^{rp}) \geq 0$, $h_m(1) = 0$; on calcule la dérivée :

$$h'_m(t) = -(r - 1)(m^{r-1} + m^{rp}) r(m) t^{r-2} - q(m^q - m^{rp}) t^{q-1};$$

la condition $h'_m(t) \leq 0$ est équivalente à

$$-(r - 1) r(m) [m^{r-1} + m^{rp}] t^{r-2} \leq q[m^q - m^{rp}] t^{q-1}; \tag{2.24}$$

puisque $q \leq rp$ alors $m^q \geq m^{rp}$; donc (2.24) est vraie parce que le membre de gauche est négatif et le membre de droite est positif.

b) Supposons que $h_m(t)$ ait un minimum négatif en $\tilde{t}(m)$; alors $h'_m(\tilde{t}(m)) = 0$ c'est à dire

$$[-r(m)m^{r-1}(r-1) - m^{rp}(r-1)r(m)][\tilde{t}(m)]^{r-2} = q[m^q - m^{rp}][\tilde{t}(m)]^{q-1}$$

ce qui est équivalent à

$$[\tilde{t}(m)]^{r-1-q} = q\frac{m^q - m^{rp}}{r(m)(1-r)(m^{rp} + m^{r-1})}.$$

On remarque que $\tilde{t}(m) > 0$, comme $q > rp$. Si $\tilde{t}(m) > 1$ il n'y a rien à prouver. Supposons alors que $\tilde{t}(m) \leq 1$: si on calcule $h_m(\tilde{t}(m))$ on a

$$h_m(\tilde{t}(m)) = s(m)(1 - m^{rp}) - [\tilde{t}(m)]^{r-1} r(m)(m^{r-1} + m^{rp}) + [\tilde{t}(m)]^q (m^{rp} - m^q)$$

$$= s(m)(1 - m^{rp}) - [\tilde{t}(m)]^{r-1}[r(m)(m^{r-1} + m^{rp}) - [\tilde{t}(m)]^{q-r+1}(m^{rp} - m^q)]$$

$$= s(m)(1 - m^{rp}) - [\tilde{t}(m)]^{r-1}[r(m)(m^{r-1} + m^{rp}) -$$

$$\frac{r-1}{q} r(m) \frac{m^{rp} + m^{r-1}}{m^{rp} - m^q}(m^{rp} - m^q)]$$

$$= s(m)(1 - m^{rp}) - [\tilde{t}(m)]^{r-1} r(m)(m^{r-1} + m^{rp}) \left[1 - \frac{r-1}{q}\right]$$

$$\geq s(m)(1 - m^{rp}) - r(m)(m^{r-1} + m^{rp})\frac{q - r + 1}{q}$$

$$= \frac{m^q + m^{r-1}}{1 + m^{r-1}}(1 - m^{rp}) - \frac{1 - m^q}{1 + m^{r-1}}(m^{r-1} + m^{rp})\frac{q - r + 1}{q}$$

$$= \frac{1}{1 + m^{r-1}} \frac{1}{q}\{q(m^q + m^{r-1})(1 - m^{rp}) - (1 - m^q)(m^{r-1} + m^{rp})(q - r + 1)\}$$

$$= \frac{1}{q} \frac{m^{r-1}}{1 + m^{r-1}}\{q(m^{q-r+1} + 1)(1 - m^{rp}) - (q - r + 1)(1 - m^q)(1 + m^{rp+1-r})\}.$$

Nous allons montrer que

$$G(m) = q(m^{q-r+1} + 1)(1 - m^{rp}) - (q - r + 1)(1 - m^q)(1 + m^{rp+1-r}) \geq 0\,.$$

Ceci impliquera que $h_m(t) \geq h_m(\tilde{t}(m))$ comme souhaité.

On observe que $G(0) = q - (q - r + 1) \geq 0$, $G(1) = 0$. On pose, pour $\alpha \geq 0$,

$$H(\alpha, m) = q(m^{\alpha-r+1} + 1)(1 - m^{rp}) - (q - r + 1)(1 - m^\alpha)(1 + m^{rp+1-r})\,;$$

on voit tout de suite que $H(q, m) = G(m)$; d'ailleurs si $\alpha \geq \beta$, $m^\alpha \leq m^\beta$ et donc $-(1 - m^\alpha) \leq -(1 - m^\beta)$ et $1 + m^{\alpha-r+1} \leq 1 + m^{\beta-r+1}$; ceci implique que $H(\beta, m) \geq H(\alpha, m)$. On va montrer que $H(rp + r - 1, m) = \bar{H}(m) \geq 0$: ceci impliquera que pour $rp < q \leq rp + r - 1$ on a

$$G(m) = H(q, m) \geq H(rp + r - 1, m) \geq 0,$$

et donc la conclusion. On a que

$$\bar{H}(m) = q(1 + m^{rp})(1 - m^{rp}) -$$

$$(q - r + 1)(1 - m^{rp+r-1})(1 + m^{rp-r+1})$$

$$= q(1 - m^{2rp}) - (q - r + 1)(1 - m^{2rp} - m^{rp+r-1} + m^{rp-r+1})$$

$$= (r - 1)(1 - m^{2rp}) + (q - r + 1)(m^{rp+r-1} - m^{rp-r+1}) \geq 0\,.$$

On a que $\bar{H}(0) = r-1$; $\bar{H}(1) = 0$; par ailleurs on prouvera que $\bar{H}'(m) \leq 0$ (et donc le résultat $\bar{H}(m) \geq 0$) :

$$\begin{aligned} \bar{H}'(m) &= -2(r-1)rp\, m^{2rp-1} + \\ &+ (q-r+1)\left[(rp+r-1)m^{rp+r-2} - (rp-r+1)m^{rp-r}\right] \\ &= -m^{rp+r-2}\varphi(m) \end{aligned} \tag{2.25}$$

où

$$\varphi(m) = 2(r-1)rp\, m^{rp-r+1} + (q-r+1)(rp-r+1)m^{-2r+2} - (q-r+1)(rp+r-1)\,.$$

On va montrer que $\varphi(m) \geq 0$. On observe que $\lim_{m\to 0} \varphi(m) = +\infty$; par ailleurs $\varphi(1) = (r-1)2rp - (q-r+1)(rp+r-1) + (q-r+1)(rp-r+1) = 2(r-1)(rp-q+r-1) \geq 0$. Pour la dérivée on a

$$\varphi'(m) = (r-1)2rp(rp-r+1)m^{rp-r} - 2(r-1)(q-r+1)(rp-r+1)m^{-2r+1};$$

on va chercher $\bar{m}$ tel que $\varphi'(\bar{m}) = 0$; $\varphi'(\bar{m}) = 0$ si et seulement si $rp\bar{m}^{rp-r+1} = (q-r+1)\bar{m}^{2-2r}$. On va évaluer φ dans le point $\bar{m}$ trouvé :

$$\varphi(\bar{m}) = \bar{m}^{rp-r+1}[2rp(r-1) + (rp-r+1)rp] - (q-r+1)(rp+r-1)\,.$$

On a que $\varphi(\bar{m}) \geq 0$

$$\bar{m}^{rp-r+1} rp[rp+r-1] \geq (q-r+1)(rp+r-1)$$

ce qui est équivalent à

$$(q-r+1)\bar{m}^{2-2r} \geq q-r+1$$

ce qui est vérifié, comme on étudie $m \in [0,1]$ et $2-2r < 0$. Selon les observations précédentes on a montré $G(m) \geq 0$, c'est à dire le résultat.
iii) On va montrer que $F'(1) > 0$ si et seulement si $q > (2r-1)p$: ceci implique que, si $q > (2r-1)p$, $F(x)$ a un autre zéro au delà de $x = 1$. En fait $F(0) > 0$ et $F(1) = 0$. Puisque $F'(1) > 0$ il existe un voisinage V de $m = 1$ tel que $F(m) < 0$ pour tout $m \in V$. Par le théorème d'existence des zéros, il existe $m \in (0,1)$ tel que $F(m) = 0$. On va calculer $F'(1)$:

$$\begin{aligned} F'(1) &= -\frac{q}{2p}\int_0^1 \frac{[1-t^{r-1}]t^{r-1}}{(1-t^q)^{\frac{1}{p}+1}}dt - r\int_0^1 \frac{t^{r-1}}{(1-t^q)^{\frac{1}{p}}}dt \\ &+ \frac{q}{p}\int_0^1 \frac{t^{r-1}[\frac{1}{2} + \frac{t^{r-1}}{2} - t^q]}{(1-t^q)^{\frac{1}{p}+1}}dt \\ &= \frac{q}{p}\int_0^1 \frac{t^{2r-2} - t^{r-1+q}}{(1-t^q)^{1+\frac{1}{p}}}dt - r\int_0^1 \frac{t^{r-1}}{(1-t^q)^{\frac{1}{p}}}dt. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Si on fait le changement de variable $s = t^q$ on obtient $dt = \frac{1}{q}s^{\frac{1}{q}-1}ds$ et

$$\begin{aligned} F'(1) &= \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{s^{\frac{2r-1}{q}-1} - s^{\frac{r}{q}}}{(1-s)^{1+\frac{1}{p}}}ds - \frac{r}{q}\int_0^1 \frac{s^{\frac{r}{q}-1}}{(1-s)^{\frac{1}{p}}}ds \\ &= \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{s^{\frac{2r-1}{q}-1} - s^{\frac{2r-1}{q}}}{(1-s)^{1+\frac{1}{p}}}ds + \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{s^{\frac{2r-1}{q}} - s^{\frac{r}{q}}}{(1-s)^{1+\frac{1}{p}}}ds - \frac{r}{q}\int_0^1 \frac{s^{\frac{r}{q}-1}}{(1-s)^{\frac{1}{p}}}ds\,. \end{aligned}$$

Le premier terme peut être récrit avec la fonction B , comme $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ (voir [1] page 4) :

$$\frac{1}{p}\int_0^1 \frac{s^{\frac{2r-1}{q}-1} - s^{\frac{2r-1}{q}}}{(1-s)^{1+\frac{1}{p}}} ds = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{s^{\frac{2r-1}{q}-1}}{(1-s)^{\frac{1}{p}}} ds = \frac{1}{p} B\left(\frac{2r-1}{q}, \frac{1}{p'}\right).$$

En intégrant par parties le deuxième terme de $F'(1)$ on a

$$\frac{1}{p}\int_0^1 \frac{s^{\frac{2r-1}{q}} - s^{\frac{r}{q}}}{(1-s)^{1+\frac{1}{p}}} ds = \left[\frac{s^{\frac{2r-1}{q}} - s^{\frac{r}{q}}}{(1-s)^{\frac{1}{p}}}\right]\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{\frac{2r-1}{q} s^{\frac{2r-1}{q}-1} - \frac{r}{q} s^{\frac{r}{q}-1}}{(1-s)^{\frac{1}{p}}} ds;$$

en utilisant la règle de L'Hôpital

$$\lim_{s\to 1} \frac{[s^{\frac{2r-1}{q}} - s^{\frac{r}{q}}]^p}{1-s} = 0;$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\int_0^1 \frac{s^{\frac{2r-1}{q}} - s^{\frac{r}{q}}}{(1-s)^{1+\frac{1}{p}}} ds &= -\frac{2r-1}{q}\int_0^1 \frac{s^{\frac{2r-1}{q}-1}}{(1-s)^{\frac{1}{p}}} ds + \frac{r}{q}\int_0^1 \frac{s^{\frac{r}{q}-1}}{(1-s)^{\frac{1}{p}}} ds \\
&= -\frac{2r-1}{q} B\left(\frac{2r-1}{q}, \frac{1}{p'}\right) + \frac{r}{q}\int_0^1 \frac{s^{\frac{r}{q}-1}}{(1-s)^{\frac{1}{p}}} ds .
\end{aligned}$$

Alors

$$F'(1) = \left(\frac{1}{p} - \frac{2r-1}{q}\right) B\left(\frac{2r-1}{q}, \frac{1}{p'}\right).$$

Puisque $B(x,y) > 0$ si $x > 0$ et $y > 0$ alors $F'(1) > 0$ si et seulement si $q > (2r-1)p$. □

Remarque 2.3.2. *On a montré que $F(m) > 0$ en étudiant $g_m(t) \geq 0$ qui est équivalent à $h_m(t) \geq 0 \,\forall\, m, t \in (0,1)\times(0,1)$. L'estimation obtenue est optimale : en fait, en calculant*

$$h'_m(1) = -r(m)m^{r-1}(r-1) - m^q q - m^{rp}[(r-1)r(m) - q],$$

et en étudiant la fonction $l(m) := h'_m(1)$ on a que

$$\begin{aligned}
l'(m) &= (r-1)\frac{qm^{q-1}(1+m^{r-1}) + (r-1)m^{r-2}(1-m^q)}{(1+m^{r-1})^2} m^{r-1} \\
&-(r-1)^2 m^{r-2}\frac{1-m^q}{1+m^{r-1}} - q^2 m^{q-1} - rpm^{rp-1}\left[(r-1)\frac{1-m^q}{1+m^{r-1}} - q\right] \\
&+m^{rp}(r-1)\frac{qm^{q-1}(1+m^{r-1}) + (r-1)m^{r-2}(1-m^q)}{(1+m^{r-1})^2}
\end{aligned}$$

et donc

$$l'(1) = q(r-1-q+rp) \geq 0$$

si et seulement si $q \leq rp + r - 1$.

Lemme 2.3.3. *Soient F et M les fonctions définies dans la proposition 2.2.1. Soit $q > (2r-1)p$; alors il existe un point $m_0 \in (0,1)$ tel que $F(m_0) = 0$ et $M(m_0) < M(1)$.*

Démonstration. On observe que $M(m)$ est $C^1(0,1]$ et $\lim\limits_{m\to 0} M(m) = +\infty$, parce que

$$\lim_{m\to 0} s(m)^{\frac{p'+q}{p'q}} = +\infty, \;\; 0 < \lim_{m\to 0} \int_{-m}^{1} [1-|z|^q - r(m)[1-|z|^{r-2}z]]^{\frac{1}{p'}}\, dz < \infty\,.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} & M(m) = c\,(1-r\,(m))^{-\frac{1}{q}} \\ & \int_{-m}^{1} \left[1 + r\,(m)\,(1-r\,(m))^{-1}\,|z|^{r-2}\,z - (1-r\,(m))^{-1}\,|z|^q\right]^{\frac{1}{p'}} dz \end{aligned}$$

où

$$c = c\,(p,q) = 2\left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} \left[\frac{q(p-1)+p}{2p}\right]^{\frac{p'+q}{p'q}}.$$

En faisant le changement de variable $z = (1-r\,(m))^{\frac{1}{q}}\, t$, on obtient

$$M(m) = c\int_{\frac{-m}{[1-r(m)]^{1/q}}}^{\frac{1}{[1-r(m)]^{1/q}}} \left[1 + \frac{r(m)}{1-r(m)}[1-r(m)]^{\frac{r-1}{q}}|t|^{r-2}t - |t|^q\right]^{\frac{1}{p'}} dt$$

En posant $\alpha\,(m) = -m\,(1-r\,(m))^{-\frac{1}{q}}$, $\beta\,(m) = (1-r\,(m))^{-\frac{1}{q}}$ et $\gamma\,(m) = r\,(m)\,(1-r\,(m))^{-1+\frac{r-1}{q}}$ on obtient

$$M\,(m) = c\,(p,q) \int_{\alpha(m)}^{\beta(m)} \left[1 + \gamma\,(m)\,|t|^{r-2}\,t - |t|^q\right]^{\frac{1}{p'}} dt\,.$$

Alors, puisque $\alpha(m)$ et $\beta(m)$ sont deux zéros de l'intégrande

$$M'\,(m) = \frac{c\,(p,q)}{p'}\gamma'\,(m) \int_{\alpha(m)}^{\beta(m)} \frac{|t|^{r-2}\,t}{\left[1+\gamma\,(m)\,|t|^{r-2}\,t - |t|^q\right]^{\frac{1}{p}}} dt\,.$$

En faisant de nouveau le changement de variable $t = (1-r\,(m))^{-\frac{1}{q}}\,z$ on a

$$\begin{aligned} M'\,(m) = {} & \frac{c\,(p,q)}{p'}\gamma'\,(m)\,(1-r\,(m))^{-\frac{r}{q}} \\ & \int_{-m}^{1} \frac{|z|^{r-2}\,z\,dz}{\left[1+r\,(m)\,(1-r\,(m))^{-1}\,|z|^{r-2}\,z - (1-r\,(m))^{-1}\,|z|^q\right]^{\frac{1}{p}}} \\ = {} & \frac{c\,(p,q)}{p'}\gamma'\,(m)\,(1-r\,(m))^{\frac{1}{p}-\frac{r}{q}}\,F\,(m) \\ = {} & \frac{c\,(p,q)}{p'}r'\,(m)\,(1-r\,(m))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-2}\left(1-\frac{r-1}{q}r\,(m)\right)F\,(m)\,. \end{aligned}$$

On remarque que si $m \in (0,1)$ $r'(m) < 0$, $[1-r(m)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-2} > 0$ et $1-\frac{r-1}{q}r(m) > 0$ parce que $1 > \frac{r-1}{q} \geq \frac{r-1}{q}r(m)$ sous notre hypothèse $q > r-1$. Donc si $m \in (0,1)$ on a $M'(m) = 0$ si et seulement si $F(m) = 0$. Puisque $q > (2r-1)p$ on a par le lemme 2.3.1 $F(m) < 0$ dans un voisinage de $m = 1$ et donc $m = 1$ est un point de maximum local pour $M(m)$. Alors $M(1) > M(m_0) = \min\limits_{m\in(0,1]} M(m)$, avec $m_0 \in (0,1)$. Comme $M'(m) = 0$, $F(m_0) = 0$. On peut dire aussi que m_0 est le plus grand zéro de F inférieur à 1. □

Remarque 2.3.4. *Dans [10] il est montré que* $\alpha(p,q,q) = M(1)$.

On peut maintenant montrer le théorème 2.1.1 :

Démonstration. Si $q \leq rp + r - 1$, alors, puisque $m = 1$ est l'unique zéro de $F(m)$, on déduit que

$$\alpha(p,q,r) = \alpha(p,q,q) = M(1) = 2\left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} \left[\frac{q(p-1)+p}{2p}\right]^{\frac{p'+q}{p'q}} \int_{-1}^{1} [1-|z|^q]^{\frac{1}{p'}}\, dz.$$

En faisant le changement de variable $z^q = s$ on a que

$$\int_0^1 [1-z^q]^{\frac{1}{p'}} = \frac{1}{q} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p'} + 1\right).$$

En utilisant que (voir [1] page 5)

$$B(x, y+1) = \frac{y}{x+y} B(x,y),$$

on arrive à

$$\alpha(p,q,r) = 2\left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{2}{p'+q}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} B\left(\frac{1}{p'}, \frac{1}{q}\right).$$

Si $q > (2r-1)p$, alors

$$\alpha(p,q,q) = M(1) > \inf\{M(m) :\ m \in (0,1],\ F(m) = 0\} = \alpha(p,q,r).$$

$\square$

2.4 Cas limites

Dans cette section on calcule les cas limites suivants :

$$\alpha(\infty,q,r),\ \alpha(p,1,2),\ \alpha(p,\infty,2).$$

Proposition 2.4.1. *Si* $q \geq r - 1 \geq 1$, $q > 1$ *alors*

$$\alpha(\infty,q,r) = \lim_{p\to\infty} \alpha(p,q,q) = 2^{\frac{1}{q'}} (q+1)^{\frac{1}{q}}.$$

Démonstration. Nous avons vu que, si $q \geq r - 1 \geq 1$, $p, q > 1$ et $q \leq rp + r - 1$, $\forall\, v \in W^{1,p}_{pér}(-1,1)$ tel que $\int_{-1}^{1} |v|^{r-2} v = 0$

$$\|v'\|_p \geq \alpha(p,q,r) \|v\|_q \tag{2.27}$$

où $\alpha(p,q,r) = 2\left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{2}{p'+q}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} B\left(\frac{1}{p'}, \frac{1}{q}\right)$. Si $v \in W^{1,\infty}_{pér}(-1,1)$ on a $2^{\frac{1}{p}} \|v'\|_\infty \geq \|v\|_p$, et donc en passant à la limite pour $p \to \infty$ dans (2.27) on a

$$\|v'\|_\infty \geq \bar{\alpha} \|v\|_q$$

où $\bar{\alpha} = \lim_{p\to\infty} \alpha(p,q,r) = 2^{\frac{1}{q'}}(q+1)^{\frac{1}{q}}$ grâce à la continuité de la fonction B et au fait que

$$B\left(1,\frac{1}{q}\right) = \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{q}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)}{\frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)} = q$$

par les propriétés de la fonction Γ (voir [1] page 3). Ceci implique que $\alpha(\infty,q,r) \geq \bar{\alpha}$. Par ailleurs soit u_p la fonction qui minimise notre fonctionnelle : on a montré dans le lemme 2.2.2

$$\|u_p\|_q^q = \frac{2ps(m_p)}{q(p-1)+p},$$

$$|u_p'|^p = \frac{p'}{q}\alpha^p \|u_p\|_q^{p-q}[s(m_p) - |u_p|^q + r(m_p)|u_p|^{r-2}u_p]\,,$$

où

$$r(m_p) = \frac{1-m_p^q}{1+m_p^{r-1}}$$

et

$$s(m_p) = 1 - r(m_p).$$

Comme on est en train de considérer $p \to \infty$ on peut supposer que $rp+r-1 \geq q$; donc $m_p = -\min_{x\in[-1,1]} u_p(x) = 1$. Alors $\|[s(m_p)-|u_p|^q+r(m_p)|u_p|^{r-2}u_p]^{\frac{1}{p}}\|_\infty = 1$ et donc l'équation précédente implique que

$$\|u_p'\|_\infty = \left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p}} \alpha(p,q,r)\|u_p\|_q^{1-\frac{q}{p}}.$$

Alors on peut dire que

$$\alpha(\infty,q,r) \leq \frac{\|u_p'\|_\infty}{\|u_p\|_q} = \left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p}} \alpha(p,q,r)\|u_p\|_q^{-\frac{q}{p}}. \tag{2.28}$$

On observe que si $p \to \infty$, $\|u_p\|_q \to \left(\frac{2}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}$. En passant à la limite dans (2.28) on obtient $\alpha(\infty,q,r) \leq \bar{\alpha}$. Ceci conclut la démonstration. □

Proposition 2.4.2. *Si $p > 1$ alors $\alpha(p,1,2) = \lim_{q\to 1} \alpha(p,q,q) = 2^{\frac{1}{p}}(p'+1)^{\frac{1}{p'}}$.*

Démonstration. Nous avons vu que, si $1 < q \leq 2p+1$, $p > 1$, $\forall\, v \in W^{1,p}_{pér}(-1,1)$ tel que $\int_{-1}^{1} |v|^{r-2}v = 0$

$$\|v'\|_p \geq \alpha(p,q,2)\|v\|_q \tag{2.29}$$

où $\alpha(p,q,2) = 2\left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{2}{p'+q}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} B\left(\frac{1}{p'},\frac{1}{q}\right)$. Or,

$$\|v'\|_p \geq \alpha(p,q,2)\|v\|_q \geq \alpha(p,q,2)2^{\frac{-1}{q'}}\|v\|_1,$$

et donc en passant à la limite pour $q \to 1$ on a

$$\|v'\|_p \geq \bar{\alpha}\|v\|_1$$

où $\bar{\alpha} = \lim\limits_{q\to 1} \alpha(p,q,2) = 2^{\frac{1}{p}}(p'+1)^{\frac{1}{p'}}$, grâce à la continuité de la fonction B et au fait que

$$B\left(\frac{1}{p'},1\right) = \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{1}{p'}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{p'}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p'}\right)}{\frac{1}{p'}\Gamma\left(\frac{1}{p'}\right)} = p'$$

par les propriétés de la fonction Γ (voir [1] page 3). Maintenant on voudrait montrer qu'il existe u_0 non identiquement nulle telle que $\|u_0'\|_p = \bar{\alpha}\|u_0\|_1$ pour conclure la démonstration. Soit u_q le point de minimum trouvé précédemment. On a vu dans le lemme 2.2.2 que u_q satisfait

$$|u_q'(x)|^p = \alpha^p \frac{p'}{q}\|u_q\|_q^{p-q}[r(m_q)u_q(x) - |u_q(x)|^q + s(m_q)]\,, \tag{2.30}$$

où

$$\|u_q\|_q^q = \frac{2ps(m_q)}{q(p-1)+p}.$$

Comme on est en train de considérer $q \to 1$, on peut supposer que $q \leq 2p+1$ et ainsi $m_q = 1$; donc $\|u_q\|_q^q = \frac{2p}{q(p-1)+p}$ et $|u_q'(x)|^p = \alpha^p \frac{p'}{q}\|u_q\|_q^{p-q}[1-|u_q(x)|^q]$. On voit tout de suite alors que $\|u_q\|_\infty \leq c \;\forall\, q$. Quitte à passer à une sous-suite, on peut dire que, si $q \to 1$ $u_q \rightharpoonup u_0$ faiblement dans $W^{1,\infty}(-1,1)$. Ceci implique que $\|u_q - u_0\|_\infty \to 0$; grâce à l'inégalité de Hölder $\|u_q - u_0\|_q \to 0$: donc $|\|u_q\|_q - \|u_0\|_q| \to 0$.

On va maintenant montrer que $\|u_0\|_q \to \|u_0\|_1$. Par l'inégalité de Hölder on a $\|u_0\|_1 \leq \lim\limits_{q\to 1}\|u_0\|_q$. Pour montrer que $\|u_0\|_1 \geq \lim\limits_{q\to 1}\|u_0\|_q$, on écrit l'inégalité d'interpolation pour $p = 1 \leq q \leq r = \frac{1}{q-1}, \lambda = \dfrac{1-q+\frac{1}{q}}{2-q}$:

$$\|u_0\|_q \leq \|u_0\|_1^\lambda \|u_0\|_{\frac{1}{q-1}}^{1-\lambda}$$

et donc

$$\|u_0\|_q \leq \|u_0\|_1^\lambda \|u_0\|_{\frac{1}{q-1}}^{1-\lambda} \leq \|u_0\|_1^\lambda \|u_0\|_\infty^{1-\lambda} 2^{\frac{1-\lambda}{q-1}}.$$

Comme si $q \to 1$, $\|u_0\|_1^\lambda \|u_0\|_\infty^{1-\lambda} 2^{\frac{1-\lambda}{q-1}} \to \|u_0\|_1$ on obtient le résultat. Ceci et le fait que $|\|u_q\|_q - \|u_0\|_q| \to 0$ impliquent que $\|u_q\|_q \to \|u_0\|_1$.

Ainsi on peut écrire

$$\bar{\alpha} = \liminf_{q\to 1} \frac{\|u_q'\|_p}{\|u_q\|_q} \geq \frac{\|u_0'\|_p}{\|u_0\|_1} \geq \bar{\alpha}.$$

Ceci conclut la démonstration. □

Proposition 2.4.3. *Si $p > 1$ alors $\alpha(p,\infty,2) = 2^{\frac{1}{p}}(p'+1)^{\frac{1}{p'}}$.*

Remarque 2.4.4. *On observe que $\alpha(p,\infty,2) = 2^{\frac{1}{p}}(p'+1)^{\frac{1}{p'}} = \alpha(p,1,2)$.*

Démonstration. Par définition de $\alpha(p,q,2)$ on a que

$$\|v'\|_p \geq \alpha(p,q,2)\|v\|_q, \forall\, v \in W^{1,p}_{pér}(-1,1)\;,\; \int_{-1}^1 v = 0\,.$$

En passant à la limite dans la relation précédente, comme $\lim\limits_{q\to\infty} 2^{-\frac{1}{q}}\|v\|_q = \|v\|_\infty$ (voir [21] corollaire 19.9) on a

$$\|v'\|_p \geq \liminf_{q\to\infty} \alpha(p,q,2)\|v\|_\infty \,.$$

Maintenant on va montrer qu'il existe $u \in W^{1,p}_{pér}(-1,1)$ telle que $\int_{-1}^{1} u = 0$ et $\|u'\|_p = \liminf\limits_{q\to\infty} \alpha(p,q,2)\|u\|_\infty$. On a vu qu'il existe u_q telle que

$$\frac{\|u_q'\|_p}{\|u_q\|_q} = \alpha(p,q,2); \tag{2.31}$$

par ailleurs, si $m_q = -\min u_q(x)$ par (2.8) et l'expression de $\|u_q\|_q^q$ on a

$$\begin{aligned} |u_q'| &= \alpha(p,q,2)\left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p}} \|u_q\|_q^{\frac{p-q}{p}} \left[r(m_q)|u|^{r-2}u + s(m_q) - |u|^q\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \alpha(p,q,2)\left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{2p}{q(p-1)+p}\right]^{\frac{p-q}{pq}} 3^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

On observe que $\liminf\limits_{q\to\infty} \alpha(p,q,2)$ et $\lim\limits_{q\to\infty} \left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{2p}{q(p-1)+p}\right]^{\frac{p-q}{pq}} 3^{\frac{1}{p}}$ sont finies : en fait pour la deuxième limite il faut étudier la quantité

$$\left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2p}{q(p-1)+p}\right)^{\frac{p-q}{pq}} = \left[\frac{q(p-1)+p}{2q(p-1)}\right]^{\frac{1}{p}} \left[\frac{2p}{q(p-1)+p}\right]^{\frac{1}{q}} \to 1\,.$$

Donc $\|u_q'\|_\infty \leq c(p)\,\forall\, q$. Quitte à passer à une sous-suite on peut dire que $\|u_q - \bar{u}\|_\infty \to 0$ et $\liminf\limits_{q\to\infty} \|u_q'\|_p \geq \|\bar{u}'\|_p$; par ailleurs, puisque $\|u_q - \bar{u}\|_q 2^{-\frac{1}{q}} \leq \|u_q - \bar{u}\|_\infty$ on a $2^{-\frac{1}{q}}\|u_q - \bar{u}\|_q \to 0$. Ceci implique que $2^{-\frac{1}{q}}\|u_q\|_q - 2^{-\frac{1}{q}}\|\bar{u}\|_q \to 0$ et donc $2^{-\frac{1}{q}}\|u_q\|_q \to \|\bar{u}\|_\infty$, parce que $2^{-\frac{1}{q}}\|\bar{u}\|_q \to \|\bar{u}\|_\infty$ (voir [21] corollaire 19.9). Alors

$$\liminf_{q\to\infty} \alpha(p,q,2) = \liminf_{q\to\infty} \frac{2^{-\frac{1}{q}}\|u_q'\|_p}{2^{-\frac{1}{q}}\|u_q\|_q} \geq \frac{\|\bar{u}'\|_p}{\|\bar{u}\|_\infty} \geq \liminf_{q\to\infty} \alpha(p,q,2)\,,$$

c'est à dire $\bar{u}$ est la fonction cherchée. Maintenant il suffit de calculer

$$\liminf_{q\to\infty} \alpha(p,q,2) = \liminf_{q\to\infty} \frac{\|u_q'\|_p}{\|u_q'\|_p}\,.$$

On sait que si $m_q = -\min u_q(x)$ alors $F(m_q) = 0$; donc si $m_0 = \lim\limits_{q\to\infty} m_q$ (il existe, quitte à passer à une sous-suite, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, parce que $|m_q| \leq 1$) en passant à la limite dans l'expression de F, (voir lemme 2.2.8) grâce au théorème de Lebesgue, on a

$$0 = \lim_{q\to\infty} F(m_q) = (1+m_0)^{\frac{1}{p}} \int_{-m_0}^{1} \frac{s\,ds}{(m_0+s)^{\frac{1}{p}}}.$$

En intégrant par parties la dernière intégrale on a

$$\int_{-m_0}^{1} \frac{s\,ds}{(m_0+s)^{\frac{1}{p}}} = \frac{s(m_0+s)^{1-\frac{1}{p}}}{1-\frac{1}{p}}\Bigg|_{-m_0}^{1} - \int_{-m_0}^{1} \frac{(m_0+s)^{1-\frac{1}{p}}}{1-\frac{1}{p}} ds =$$
$$= \frac{(m_0+1)^{1-\frac{1}{p}}}{1-\frac{1}{p}} - \frac{p}{p-1}\frac{(m_0+1)^{2-\frac{1}{p}}}{2-\frac{1}{p}}.$$

Ainsi

$$0 = (m_0+1)\left[\frac{p}{p-1} - \frac{p^2}{(p-1)(2p-1)}(m_0+1)\right] = \frac{(1+m_0)(1-m_0-\frac{1}{p})}{\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(2-\frac{1}{p}\right)}.$$

Alors $\lim_{q\to\infty} m_q = m_0 = 1-\frac{1}{p}$. Puisque

$$\frac{\|u_q'\|_p}{\|u_q\|_q} = 2\left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}}\left[\frac{q\,(p-1)+p}{2p\,s(m_q)}\right]^{\frac{p'+q}{p'q}} \int_{-m_q}^{1} [1-|s|^q - r(m_q)[1-s]]^{\frac{1}{p'}}\, ds$$

on a

$$\lim_{q\to\infty} \alpha(p,q,2) =$$
$$= \lim_{q\to\infty} 2\left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}}\left[\frac{q\,(p-1)+p}{2p\,s(m_q)}\right]^{\frac{p'+q}{p'q}} \int_{-m_q}^{1} [1-|s|^q - r(m_q)[1-s]]^{\frac{1}{p'}}\, ds$$
$$= 2^{\frac{1}{p}}\left(\frac{2-1/p}{1-1/p}\right)^{\frac{1}{p'}} = 2^{\frac{1}{p}}(p'+1)^{\frac{1}{p'}}.$$

□

Remarque 2.4.5. *On a retrouvé la valeur de la constante* $\lim_{q\to\infty} \alpha(p,q,2)$*, déjà calculée dans [10].*

2.5 Appendice

On propose une autre démonstration de l'équation (2.1) : nous rappelons que on l'a déduit de (2.5), sous l'hypothèse $r \geq 2$. Maintenant on va montrer directement l'équation (2.1) pour tout $r > 1$. On observe qu'on a employé l'équation d'Euler pas seulement pour arriver à (2.1) mais aussi pour comprendre la regularité de $u(x)$ (on a utilisé en fait que $u \in C^1$ dans le corollaire 2.2.4 et dans la première étape de la proposition 2.2.5), ce qu'on ne peut pas déduire de (2.1) : c'est la raison pour laquelle on a travaillé toujours sous l'hypothèse $r \geq 2$.

Démonstration. On considère la fonctionnelle

$$H(v) = \|v'\|_p^p - \alpha^p \|v\|_q^p$$

définie sur $\mathcal{W}_r = \left\{v \in W_0^{1,p}(-1,1) \text{ et } \int_{-1}^{1} |v|^{r-2}\, v = 0\right\}$. On a montré qu'elle atteint le minimum en u. On considère pour tout $\varphi \in C_0^1(-1,1)$ telles que

$\int_{-1}^{1} |u|^{r-2} u \, \varphi' = 0$ et pour $|\varepsilon| \leq 1$ la fonction

$$w_\varepsilon(x) = x + \varepsilon \frac{\varphi(x)}{2 \, \|\varphi'\|_\infty}.$$

Alors $w_\varepsilon : [-1,1] \to [-1,1]$ est un homeomorphisme parce que

$$w'_\varepsilon(x) = 1 + \varepsilon \frac{\varphi'}{2\|\varphi'\|_\infty} \geq \frac{1}{2}.$$

Donc il existe la fonction $w_\varepsilon^{-1}(x)$ et on voit facilement que $v_\varepsilon\,(x) = u(w_\varepsilon^{-1}(x))$ appartient à $\mathcal{W}_r$. Par ailleurs $H(u) = 0 \leq H(v_\varepsilon)$. Ceci implique que

$$\frac{d}{d\varepsilon} H(v_\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} = 0.$$

On va écrire d'abord $\frac{d}{d\varepsilon} H(v_\varepsilon)$ et puis $\frac{d}{d\varepsilon} H(v_\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}$: en faisant le changement de variable $w_\varepsilon^{-1}(x) = t$ on a

$$\begin{aligned} H(v_\varepsilon) = & \int_{-1}^{1} |u'(t)|^p \left| 1 + \varepsilon \frac{\varphi'}{2\|\varphi'\|_\infty} \right|^{-p} \left(1 + \varepsilon \frac{\varphi'}{2\|\varphi'\|_\infty} \right) \\ & -\alpha^p \left[\int_{-1}^{1} |u(t)|^q \left(1 + \varepsilon \frac{\varphi'}{2\|\varphi'\|_\infty} \right) \right]^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} H(v_\varepsilon) = & (1-p) \int_{-1}^{1} |u'(t)|^p \left| 1 + \varepsilon \frac{\varphi'(t)}{2\|\varphi'\|_\infty} \right|^{-p} \frac{\varphi'(t)}{2\|\varphi'\|_\infty} \\ & -\alpha^p \frac{p}{q} \left[\int_{-1}^{1} |u|^q \left[1 + \varepsilon \frac{\varphi'(t)}{2\|\varphi'\|_\infty} \right] \right]^{\frac{p}{q}-1} \int_{-1}^{1} \frac{|u|^q \varphi'}{2\|\varphi'\|_\infty} . \end{aligned}$$

Donc en calculant la dernière expression pour $\varepsilon = 0$ on a

$$(1-p) \int_{-1}^{1} \frac{|u'(t)|^p \varphi'(t)}{2\,\|\varphi'\|_\infty} dt = \alpha^p \, \frac{p}{q} \|u\|_q^{p-q} \int_{-1}^{1} \frac{|u(t)|^q \varphi'(t)}{2\,\|\varphi'\|_\infty} dt\,. \tag{2.32}$$

Maintenant on va éliminer l'hypothèse $\int_{-1}^{1} |u|^{r-2} u \, \varphi' = 0$. Soit $\psi \in C_0^1(-1,1)$; on définit

$$\varphi\,(x) = \psi(x) - \left[\int_{-1}^{1} |u(t)|^{r-2} u(t) \psi'(t) dt \right] f(x),$$

où

$$f(x) = \frac{\int_{-1}^{x} |u(s)|^{r-2} u(s) ds}{\int_{-1}^{1} |u(a)|^{2r-2} da}.$$

Cette fonction est $C_0^1(-1,1)$; par conséquent on obtient de (2.32)

$$\begin{aligned} & (1-p) \int_{-1}^{1} |u'|^p \left[\psi' - \left(\int_{-1}^{1} |u|^{r-2} u \psi' \right) \frac{|u|^{r-2} u}{\int_{-1}^{1} |u|^{2r-2}} \right] \\ & -\alpha^p \frac{p}{q} \|u\|_q^{p-q} \int_{-1}^{1} |u|^q \left(\psi' - \int_{-1}^{1} |u|^{r-2} u \psi' \right) \frac{|u|^{r-2} u}{\int_{-1}^{1} |u|^{2r-2}} = 0 \end{aligned}$$

et donc, si

$$\sigma = \left[\int_{-1}^{1} |u|^{2r-2}\right]^{-1} \left[(1-p)\int_{-1}^{1} |u|^{r-2}u|u'|^{p} - \alpha^{p}\frac{p}{q}\|u\|_{q}^{p-q} \int -1^{1}|u|^{r-2+q}u\right]$$

on a

$$(1-p)\int_{-1}^{1} |u'|^{p}\psi' + \sigma\int_{-1}^{1} |u|^{r-2}u\psi' - \alpha^{p}\,\frac{p}{q}\|u\|_{q}^{p-q}\int_{-1}^{1} |u|^{q}\psi' = 0$$

pour tout $\psi \in C_0^1(-1,1)$. Grâce au lemme fondamental du calcul des variations on a la conclusion. $\square$

Deuxième partie

Quelques inclusions différentielles

Chapitre 3

Préliminaires

Dans ce chapitre nous allons rappeler les théorèmes d'existence que nous avons utilisés pour étudier nos problèmes différentiels. On remarque que nous allons présenter un théorème d'existence établi par Dacorogna-Marcellini, et un autre établi par Müller-Šverák. Avant de le faire nous allons donner les différentes notions de convexité pour les fonctions et pour les ensembles.

3.1 Notions de convexité pour les fonctions

On dénotera par $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition 3.1.1. *1) Une fonction $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si*

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B)$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$, $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
2) Une fonction $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$ est polyconvexe s'il existe $g : \mathbb{R}^{\tau(m,n)} \to \overline{\mathbb{R}}$ convexe telle que

$$f(A) = g(T(A))$$

où $T : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{\tau(m,n)}$ est défini par

$$T(A) = (A, adj_2 A, ..., adj_{n\wedge m} A).$$

On note par $adj_s A$ la matrice de tous les mineurs $s \times s$ de A, avec $2 \leq s \leq n \wedge m = \min\{n, m\}$, et

$$\tau(n,m) = \sum_{s=1}^{n\wedge m} \binom{m}{s}\binom{n}{s}.$$

3) Une fonction $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ Borel mesurable et localement intégrable, est quasiconvexe si

$$f(A) mes(\Omega) \leq \int_\Omega f(A + D\varphi(x))dx$$

pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domaine borné, pour tout $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ (on dénote par $mes(\Omega)$ la mesure de Lebesgue de l'ensemble Ω).

4) Une fonction $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$ *est rang un convexe si*

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B)$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$, $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *telles que* $rg(A-B) = 1$.

Remarque 3.1.2. *1) Dans le cas scalaire toutes ces notions coïncident avec la convexité.*
2) Lorsque $m = n = 2$ *la polyconvexité est équivalente à*

$$f(A) = g(A, \det A).$$

avec $g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ *(ou* $\overline{\mathbb{R}}$*) convexe.*

On va maintenant énoncer un théorème qui nous permet de "comparer" les diverses notions de convexité introduites (pour la preuve voir [8] page 102) :

Théorème 3.1.3. *1) Soit* $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$*, alors*

$$f\,\text{convexe} \Rightarrow f\,\text{polyconvexe} \Rightarrow f\,\text{quasiconvexe} \Rightarrow f\,\text{rang un convexe}\,.$$

2) Soit $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$*, alors*

$$f\,\text{convexe} \Rightarrow f\,\text{polyconvexe} \Rightarrow f\,\text{rang un convexe}\,.$$

3) Si f *est convexe, polyconvexe, quasiconvexe, rang un convexe, alors* f *est continue dans son domaine de définition.*

Remarque 3.1.4. *Toutes les implications réciproques sont fausses et pour la dernière (*f *quasiconvexe* $\Rightarrow f$ *rang un convexe) c'est le cas lorsque* $n \geq 2, m \geq 3$ *: en fait il existe un célèbre contre-exemple donné par Šverák [33].*

Exemple 3.1.5. *i) Les fonctions* $F(\xi) = \det \xi$ *et* $F(\xi) = |\det \xi|$ *sont polyconvexes.*
ii) Si on dénote par $(\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi))$ *les valeurs singulières d'une matrice* $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *(pour la définition voir le chapitre 4), la fonction* $F(\xi) = \lambda_2(\xi)$ *est convexe. La fonction* $H(\xi) = \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi)$ *est polyconvexe (en effet elle est égale à* $|\det \xi|$*). On retrouvera ces fonctions dans le chapitre 4.*

3.2 Notions de convexité pour les ensembles

Définition 3.2.1. *1) Un ensemble* $E \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ *est convexe si, pour tout* $t \in [0,1]$ *et* $A, B \in E$

$$tA + (1-t)B \in E\,.$$

2) Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ *est polyconvexe si, pour tout* $t_i \in [0,1]$ *tels que* $\sum_{i=1}^{\tau(m,n)+1} t_i = 1$ *et pour toutes* $A_i \in E$*, telles que*

$$\sum_{i=1}^{\tau(m,n)+1} t_i T(A_i) = T\left(\sum_{i=1}^{\tau(m,n)+1} t_i A_i\right)$$

alors

$$\sum_{i=1}^{\tau(m,n)+1} t_i A_i \in E\,.$$

3) Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ *est rang un convexe si, pour tout* $t \in [0,1]$ *et* $A, B \in E$ *telles que* $rg(A-B) \leq 1$

$$tA + (1-t)B \in E\,.$$

Remarque 3.2.2. *On peut noter que*

$$E\,convexe \Longrightarrow E\,polyconvexe \Longrightarrow E\,rang\,un\,convexe\,.$$

On passe maintenant à définir les différentes enveloppes :

Définition 3.2.3. *(Dacorogna-Marcellini)(voir [12] page 132)*
Soit E *un ensemble de* $\mathbb{R}^{m\times n}$*; on définit*

$$\begin{aligned}
\operatorname{co} E &= \{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} : f(\xi) \leq 0, \forall\, f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}} \;\; convexe\,, f|_E \leq 0\} \\
\operatorname{Pco} E &= \{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} : f(\xi) \leq 0, \forall\, f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}\; polyconvexe\,, f|_E \leq 0\} \\
\overline{\operatorname{Qco} E} &= \{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} : f(\xi) \leq 0, \forall\, f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}\; quasiconvexe\,, f|_E \leq 0\} \\
\operatorname{Rco} E &= \{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} : f(\xi) \leq 0, \forall\, f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}\; rang\ un\ convexe\,, f|_E \leq 0\}\,.
\end{aligned}$$

On remarque tout de suite que pour un ensemble E de $\mathbb{R}^{m\times n}$ on a

$$E \subseteq \operatorname{Rco} E \subseteq \operatorname{Pco} E \subseteq \operatorname{co} E\,.$$

Par ailleurs $\operatorname{Rco} E$ (respectivement $\operatorname{Pco} E$, $\operatorname{co} E$) est le plus petit ensemble rang un convexe (respectivement polyconvexe, convexe) qui contient E (voir [12]). Il sera utile aussi la proposition suivante (pour la preuve voir [12], page 135), qui correspond en gros au théorème de Carathéodory pour les enveloppes rang un convexe et polyconvexe :

Proposition 3.2.4. *Soit* $E \subset \mathbb{R}^{m\times n}$*. Alors*
1) $\mathrm{Rco}E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{R}_i\mathrm{co}E$*, où* $\mathrm{R}_0\mathrm{co}E = E$*, et*

$$\mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}E = \{tA + (1-t)B : A, B \in \mathrm{R}_i\mathrm{co}E, rg(A-B) \leq 1, t \in (0,1)\}\,.$$

2)

$$\mathrm{Pco}E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} : T(\xi) = \sum_{i=1}^{\tau(m,n)+1} t_i T(\xi_i),\ \xi_i \in E,\ t_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{\tau(m,n)+1} t_i = 1\right\}. \tag{3.1}$$

Proposition 3.2.5. *Soit* $O \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ *ouvert. Alors* $\operatorname{Pco} O = \bigcup_{\substack{V\subset O \\ V\ cpt}} \operatorname{Pco} V\,.$

Démonstration. On voit tout de suite que si $V \subset O$ alors $\operatorname{Pco} V \subseteq \operatorname{Pco} O$, et donc

$$\operatorname{Pco} O \supseteq \bigcup_{\substack{V\subset O \\ V\ cpt}} \operatorname{Pco} V\,.$$

On va maintenant montrer l'inclusion inverse. Soit $x \in \operatorname{Pco} O$; alors $T(x) = \sum_{i=1}^{5} t_i T(x_i)$, $x_i \in O, t_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{5} t_i = 1$. On observe que $x \in \operatorname{Pco}\{x_1,..x_5\}$ et que $\{x_1..x_5\}$ est un ensemble compact contenu dans O. Par conséquent on peut dire que

$$x \in \operatorname{Pco}\{x_1,..x_5\} \subseteq \bigcup_{\substack{V \subset O \\ V\ cpt}} \operatorname{Pco} V\,,$$

ce qui implique que $\operatorname{Pco} O \subseteq \bigcup_{\substack{V \subset O \\ V\ cpt}} \operatorname{Pco} V$. $\square$

Remarque 3.2.6. *Si E est un ensemble borné alors $\overline{\operatorname{co} E} = \operatorname{co}\overline{E}$; par ailleurs*

$$\overline{\operatorname{Pco} E} = \operatorname{Pco}\overline{E} = \{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} : f(\xi) \leq 0, \forall\ f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R} \text{ polyconvexe },\, f|_E \leq 0\}\,.$$

Pour la preuve voir [30] et [12] respectivement.

Dans cette thèse on va utiliser aussi les définitions données par Müller-Šverák, qu'on va maintenant présenter :

Définition 3.2.7. *(Müller-Šverák)[27]*
Soit $C \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ un compact. On définit

$$\operatorname{Rco}^s C = \{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} : f(\xi) \leq 0, \forall\ f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R} \text{ rang un convexe },\, f|_C \leq 0\}\,.$$

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ un ensemble quelconque. On définit

$$\operatorname{Rco}^s E = \bigcup_{\substack{C \subset E \\ C\ cpt}} \operatorname{Rco}^s C\,.$$

Remarque 3.2.8. *Si E est ouvert alors $\operatorname{Rco}^s E$ est ouvert (voir [27]). Si E est un ensemble compact alors, grâce à la remarque 3.2.6 on a $\operatorname{Pco} E \supseteq \operatorname{Rco}^s E$.*

On va maintenant souligner les différences entre les deux définitions d'enveloppe rang un convexe. Il est évident que

$$\operatorname{Rco} E \subseteq \operatorname{Rco}^s E\,,$$

et en général l'inclusion est stricte (voir l'exemple 5.25 dans [12]). Par ailleurs on remarque facilement que si E est un ensemble compact, alors $\operatorname{Rco}^s E$ est compact. Ceci n'est pas vrai pour l'enveloppe rang un convexe $\operatorname{Rco} E$, selon la définition de Dacorogna et Marcellini. En fait il existe des exemples d'ensembles compacts dont l'enveloppe rang un convexe n'est pas fermée (d'ailleurs si on regarde la proposition 3.2.4 on a que $\operatorname{Rco} E$ est union infinie d'ensembles compacts). On va donner maintenant un exemple dans $\mathbb{R}^{3\times 3}_d$ dû à Kolar (voir [23], aussi pour d'autres exemples dans $\mathbb{R}^{2\times 2}_s$ et $\mathbb{R}^{2\times 3}$).

Exemple 3.2.9. *On définit l'ensemble suivant de $\mathbb{R}^{3\times 3}_d$ (par simplicité on écrira $\operatorname{diag}(a,b,c)$ pour indiquer la matrice diagonale de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ qui a sur la diagonale principale les valeurs a, b, c) :*

$$E = \{\operatorname{diag}(1,1,1), \operatorname{diag}(-1,0,0), \operatorname{diag}(0,-1,0), \operatorname{diag}(0,0,-1)\} \bigcup$$
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\operatorname{diag}\left(-1, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right), \operatorname{diag}\left(\tfrac{1}{n+1}, -1, \tfrac{1}{n}\right), \operatorname{diag}\left(\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n+1}, -1\right)\right\}\,.$$

E est évidemment compact. On va montrer que $\mathrm{diag}(0,0,0) \in \overline{\mathrm{Rco}\, E}$*, mais* $\mathrm{diag}(0,0,0) \notin \mathrm{Rco}\, E$ *: ceci implique que* $\mathrm{Rco}\, E$ *n'est pas fermé. On va diviser la preuve en deux parties.*

1) $\mathrm{diag}(0,0,0) \in \overline{\mathrm{Rco}\, E}$: *on va prouver par induction que* $\mathrm{diag}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in \mathrm{Rco}E \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. *On a que* $\mathrm{diag}\,(1,1,1) \in E$. *Or, supposons que* $\mathrm{diag}\left(\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right) \in \mathrm{Rco}E$ *: on veut montrer que* $\mathrm{diag}\left(\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0+1}\right) \in \mathrm{Rco}E$. *On a que*

$$\mathrm{diag}\left(\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right), \, \mathrm{diag}\left(-1, \frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right) \in \mathrm{Rco}E :$$

ces deux matrices diffèrent de rang un et donc par combinaison rang un convexe on peut dire que $\mathrm{diag}\left(\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right) \in \mathrm{Rco}E$*. On a par conséquent que*

$$\mathrm{diag}\left(\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right), \mathrm{diag}\left(\frac{1}{n_0+1}, -1, \frac{1}{n_0}\right) \in \mathrm{Rco}E :$$

ces deux matrices diffèrent de rang un et donc par combinaison rang un convexe on obtient que $\mathrm{diag}\left(\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0}\right) \in \mathrm{Rco}E$*. On a par conséquent que*

$$\mathrm{diag}\left(\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0}\right), \, \mathrm{diag}\left(\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0+1}, -1\right) \in \mathrm{Rco}E :$$

ces deux matrices diffèrent de rang un et donc par combinaison rang un convexe on obtient que

$$\mathrm{diag}\left(\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0+1}\right) \in \mathrm{Rco}E,$$

c'est à dire le résultat voulu.

2) $\mathrm{diag}(0,0,0) \notin \mathrm{Rco}\, E$: *on définit*

$$\begin{aligned}&\tilde{E} = \{\mathrm{diag}(-1,0,0), \mathrm{diag}(0,-1,0), \mathrm{diag}(0,0,-1)\} \\ &\bigcup \{\mathrm{diag}(v_1, v_2, v_3) : \textit{au moins deux composantes sont positives}\} .\end{aligned}$$

On a que $\tilde{E}$ est union de deux ensembles rang un convexes qui n'ont pas des relations rang un convexes, et donc $\tilde{E}$ est rang un convexe. On a immédiatement que $\tilde{E} \supseteq E$ et par conséquent $\tilde{E} \supseteq$ $\mathrm{Rco}E$ *, comme* $\mathrm{Rco}\, E$ *est le plus petit ensemble rang un convexe qui contient E. Comme* $\mathrm{diag}(0,0,0) \notin \tilde{E}$ *alors* $\mathrm{diag}(0,0,0) \notin \mathrm{Rco}\, E$.

3.3 Notations

i) Si $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application, on dénote par Du la matrice

$$Du = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j}\right)_{1 \le j \le n}^{1 \le i \le m} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

ii) Si $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction, on dénote par $D^2 u$ la matrice

$$D^2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}\right)_{1 \le j_1, j_2 \le n} \in \mathbb{R}_s^{n \times n}$$

où l'indice s indique que la matrice est symétrique.
iii) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

• On dénote par $W^{1,\infty}(\Omega)$ l'espace de Sobolev (voir par exemple [5]) de fonctions telles que $u, Du \in L^\infty$.

• On dénote par $W^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ l'espace des applications $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ dont chaque composante $u^i, i = 1, .., m$ appartient à $W^{1,\infty}(\Omega)$.

• On dénote par $W_0^{1,1}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ l'espace des applications $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ dont chaque composante $u^i, i = 1, .., m$ appartient à $W_0^{1,1}(\Omega)$.

• On dénote par $W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ l'espace $W^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,1}(\Omega,\mathbb{R}^m)$.

• On dénote par $C^1_{morc}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$ le sous-espace d'applications de $W^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ dont Du est continu par morceaux.

• On dénote par $W^{2,\infty}(\Omega)$ l'espace de Sobolev (voir par exemple [5]) de fonctions u telles que $u, Du, D^2u \in L^\infty$.

• On dénote par $W_0^{2,\infty}(\Omega)$ l'espace $W^{2,\infty}(\Omega) \cap W_0^{2,1}(\Omega)$.

• On dénote par $C^2_{morc}(\overline{\Omega})$ le sous-espace de fonctions de $W^{2,\infty}(\Omega)$ dont D^2u est continu par morceaux.

3.4 Le théorème d'existence selon la méthode de la catégorie de Baire

Dans cette section on va énoncer un théorème d'existence établi par Dacorogna-Marcellini [12] et après amélioré par Dacorogna-Pisante [14] qui nous sera utile pour montrer l'existence de solutions pour nos problèmes différentiels. Ce théorème concerne les inclusions différentielles de tout ordre. Par simplicité de notations nous allons l'énoncer seulement dans les cas d'inclusions différentielles de premier et de deuxième ordre, c'est à dire dans les cas qui seront utiles pour résoudre les problèmes que nous allons traiter. On va définir d'abord la propriété suivante :

Définition 3.4.1. *(Propriété d'approximation)*
Soient $E \subset K(E) \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ ou $\mathbb{R}^{n\times n}_s$. On dit que les ensembles E et $K(E)$ ont la propriété d'approximation s'il existe une famille d'ensembles fermés E_δ et $K(E_\delta)$, $\delta > 0$, tels que
1) $E_\delta \subset K(E_\delta) \subset \operatorname{int}K(E)$ pour tout $\delta > 0$;
2) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ tel que $\operatorname{dist}(\eta, E) \leq \varepsilon$ pour tout $\eta \in E_\delta$ et $\delta \in [0, \delta_0]$;
3) si $\eta \in \operatorname{int}K(E)$ alors $\eta \in K(E_\delta)$ pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit.

3.4.1 Théorème d'existence pour une inclusion différentielle de premier ordre

On peut maintenant énoncer le théorème d'existence que nous allons utiliser pour étudier le problème 1.0.2 (cf. chapitre 4).

Théorème 3.4.2. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné. Soit* $E \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ *un compact qui a la propriété d'approximation avec* $\mathrm{Rco}\, E$ *et* $K(E_\delta) = \mathrm{Rco}\, E_\delta$*. Soit* $\varphi \in C^1_{\mathrm{morc}}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ *telle que*

$$D\varphi \in E \cup \mathrm{int}\, \mathrm{Rco}\, E \quad \text{p.p. dans } \Omega\,.$$

Alors il existe $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *tel que*

$$Du \in E \quad \text{p.p. dans } \Omega\,.$$

Remarque 3.4.3. *Pour le problème 1.0.2 nous allons utiliser ce théorème dans le cas* $m = n = 2$.

3.4.2 Théorème d'existence pour une inclusion différentielle de deuxième ordre

On va énoncer le théorème d'existence que nous allons utiliser pour étudier le problème 1.0.4 (cf. chapitre 5).

Théorème 3.4.4. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné. Soit* $E \subset \mathbb{R}^{n\times n}_s$ *un compact qui a la propriété d'approximation avec* $\mathrm{Rco}\, E$ *et* $K(E_\delta) = \mathrm{Rco}\, E_\delta$*. Soit* $\varphi \in C^2_{\mathrm{morc}}(\overline{\Omega})$ *telle que*

$$D^2\varphi \in E \cup \mathrm{int}\, \mathrm{Rco}\, E \quad \text{p.p. dans } \Omega\,.$$

Alors il existe $u \in \varphi + W_0^{2,\infty}(\Omega)$ *tel que*

$$D^2 u \in E \quad \text{p.p. dans } \Omega\,.$$

Remarque 3.4.5. *Pour le problème 1.0.4 nous allons utiliser ce théorème dans le cas* $n = 2$.

3.5 Le théorème d'existence selon la méthode de l'intégration convexe de Gromov

Dans cette section on va énoncer un théorème d'existence établi par Müller et Šverák [27] à l'aide de la méthode de l'intégration convexe de Gromov [18] qui nous sera utile pour montrer l'existence de solutions pour le problème 1.0.2 (voir chapitre 4). On utilisera la notion d'enveloppe rang un convexe selon la définition 3.2.7. Il sera utile de définir d'abord la propriété suivante (voir "In-approximation" dans [27]) :

Définition 3.5.1. *(Approximation par l'intérieur)*
Soit E *un ensemble compact contenu dans* $\mathbb{R}^{m\times n}$*. Une suite d'ouverts* $\{U_i\}$ *est une approximation par l'intérieur de* E *si*

1) $U_i \subseteq \mathrm{Rco}^s\, U_{i+1}$ *;*

2) $\sup_{X\in U_i} \mathrm{dist}\,(X, E) \to 0$ *si* $i \to +\infty$.

On peut maintenant énoncer le théorème d'existence :

Théorème 3.5.2. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné. Soit* E *un compact qui admet une approximation par l'intérieur par des ensembles ouverts* U_i. *Soit* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *une application* C^1 *telle que* $D\varphi \in U_1$ *dans* Ω. *Alors il existe une application* $u \in \varphi + W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *telle que*

$$Du \in E \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Chapitre 4

Une inclusion différentielle de premier ordre

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier l'existence d'applications $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, où Ω est un ouvert borné, qui satisfont le problème

$$\begin{cases} Du \in E & \text{p.p. dans } \Omega \\ u(x) = \varphi(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

où E est un ensemble isotrope compact de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, c'est à dire que E satisfait la propriété que si $\xi \in E$, alors $R\xi S \in E$, pour toute matrice $R, S \in \mathcal{O}(2)$ (dans toute cette thèse on dénotera par $\mathcal{O}(2)$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathbb{R}^2$).

Ce problème est typique dans les microstructures : en fait l'étude de la minimisation d'énergie nécessaire pour la déformation d'un cristal élastique est en général de la forme

$$I(u) = \int_\Omega W(Du)$$

où W est une fonction invariante par rotations ; par conséquent ce problème est lié à l'étude d'inclusions différentielles définies pour des ensembles E invariants par rotations (voir par exemple [26]).

Pour énoncer le théorème d'existence que nous avons établi, il est utile d'écrire E dans la façon suivante : soient

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y\}$$

et $K \subset T$ un compact ; si ξ est une matrice de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ on dénotera par $(\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi))$ ses valeurs singulières $(0 \le \lambda_1(\xi) \le \lambda_2(\xi))$, c'est à dire les valeurs propres de la matrice $\sqrt{\xi\xi^T}$ (voir Appendice). Alors

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K\}. \tag{4.2}$$

Dans tout ce chapitre nous allons supposer que

$$\forall\ (x, y) \in K \quad x > 0. \tag{4.3}$$

Nous allons établir un théorème d'existence pour le problème (4.1). On rappelle que Dacorogna et Marcellini (voir [12], page 128) ont déjà établi un résultat d'existence dans le cas où l'ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est composé par un seul élément. Nous allons généraliser ce résultat. Plus précisément nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.1.1. *Soient $K \subset T$ un compact qui satisfait (4.3) et $E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K\}$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné. Soit $\varphi \in C^1_{morc}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ telle que $D\varphi(x) \in E \cup \operatorname{int} \operatorname{Rco}E$ dans Ω. Alors il existe une application $u \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ solution de (4.1).*

Pour montrer ce théorème nous allons utiliser les deux techniques différentes que nous avons présentées dans le chapitre 3 : la méthode de la catégorie de Baire et la méthode de l'intégration convexe. On voudrait maintenant souligner la différence d'utilisation de ces méthodes. Nous allons voir que la méthode de l'intégration convexe de Gromov sera la plus difficile à utiliser dans notre problème. En effet les hypothèses que le théorème d'existence 3.5.2 requiert sont plus strictes que les hypothèses du théorème 3.4.2 : il suffit de penser au fait que dans le théorème d'existence établi par Müller et Šverák il faut construire nécessairement une suite d'ensembles ouverts pour approcher l'ensemble E (qui n'est pas ouvert), alors que dans la méthode de la catégorie de Baire il n'y a aucune hypothèse "topologique" sur les ensembles qui approchent l'ensemble E. Ces difficultés de la méthode de Gromov nous ont amenés à établir notre théorème d'existence pas pour un K compact quelconque, mais pour un K composé par un nombre fini de points, à la différence de la méthode de la catégorie de Baire qui nous a permis de montrer le théorème 4.1.1 dans sa généralité.

Pour établir notre résultat nous allons travailler avec l'enveloppe rang un convexe de l'ensemble E. Pour cela nous utilisons un résultat dû à Cardaliaguet-Tahraoui [7] que nous allons voir dans la section suivante.

Dans le dernier paragraphe de ce chapitre on va donner une représentation plus explicite de $\operatorname{Rco} E$, dans le cas où l'ensemble K qui définit E est composé par un nombre fini de points.

4.2 Préliminaires

Dans cette section nous allons étudier la représentation de l'enveloppe rang un convexe d'un ensemble isotrope compact de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. A l'aide des résultats montrés par Cardaliaguet-Tahraoui nous allons établir la formule pour l'enveloppe rang un convexe de l'ensemble E.

4.2.1 Quelques résultats connus sur l'enveloppe polyconvexe

Dans cette section nous allons rappeler des résultats établis par Cardaliaguet-Tahraoui [7] liés à l'enveloppe polyconvexe d'un ensemble isotrope compact de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Plus précisément la première proposition nous donne la formule pour l'enveloppe polyconvexe.

Proposition 4.2.1. *Soit $K \subset T$ un compact et $E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K\}$. Soient*

$$\begin{aligned} \Sigma &= \left\{(\theta,\gamma) \in \mathbb{R}^2_+ : \gamma \geq \theta^2 \text{ et } \forall\ (x,y) \in K\ y \leq \theta + \frac{\gamma - \theta^2}{x+\theta}\right\} \\ \sigma(x) &= \inf_{(\theta,\gamma)\in\Sigma} \theta + \frac{\gamma-\theta^2}{x+\theta},\ \forall\ x \geq 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Alors

$$\mathrm{Pco}E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) \leq \sigma(\lambda_1(\xi))\}.$$

On rappelle par ailleurs que Cardaliaguet-Tahraoui ont montré aussi le résultat suivant.

Théorème 4.2.2. *Soit $\mathbb{K}$ un ensemble isotrope compact rang un convexe de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Alors $\mathbb{K}$ est polyconvexe.*

Remarque 4.2.3. *On ne peut pas déduire tout de suite des résultats précédents la formule de l'enveloppe rang un convexe pour un ensemble E compact isotrope, parce qu'on ne sait pas a priori si l'enveloppe rang un convexe d'un ensemble isotrope compact de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ est compact. Cependant dans la section suivante nous allons montrer que* $\mathrm{Pco}\,E = \mathrm{Rco}\,E$.

Il nous sera utile aussi la proposition suivante : nous allons voir que la fonction définie ci-dessous est liée à l'enveloppe rang un convexe de E.

Proposition 4.2.4. *Pour tout $\theta \geq 0$ la fonction $H_\theta : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$H_\theta(\xi) = \max\{\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \theta(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) - \theta^2, 0\}$$

est polyconvexe.

4.2.2 L'enveloppe rang un convexe

Dans cette section nous allons démontrer le théorème suivant. On indiquera par $m(\theta)$ la fonction $\max_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a)$ dans tout ce chapitre.

Théorème 4.2.5. *Soit $K \subset T$ un ensemble compact qui satisfait (4.3). Soit*

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Rco}E &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \theta(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) \leq m(\theta), \forall\ \theta \in [0, \max_{(a,b)\in K} b]\right\}, \\ \mathrm{int}\,\mathrm{Rco}E &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \theta(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) < m(\theta), \forall\ \theta \in [0, \max_{(a,b)\in K} b]\right\}. \end{aligned}$$

La preuve de ce théorème est divisée en plusieurs propositions. Dans la première on va écrire différemment la formule pour l'enveloppe polyconvexe de l'ensemble E :

Proposition 4.2.6. *Soient $K \subset T$ un ensemble compact qui satisfait (4.3) et $E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K\}$. Soit σ la fonction définie par (4.4). Alors*

$$\sigma(x) = \min_{\theta \in [0, \max\limits_{(a,b)\in K} b]} \frac{\theta x + m(\theta)}{x+\theta}. \tag{4.5}$$

Démonstration. On va diviser la démonstration en deux étapes : dans la première on va étudier l'ensemble Σ défini dans la proposition 4.2.1, et dans la deuxième on va établir la formule pour la fonction σ.
Étape 1 : Étude de l'ensemble Σ *:* D'après la proposition 4.2.1

$$\Sigma = \left\{ (\theta, \gamma) \in \mathbb{R}^2_+ : \gamma \geq \theta^2 \text{ et } \forall\ (x,y) \in K\ y \leq \theta + \frac{\gamma - \theta^2}{x+\theta} \right\}.$$

Comme pour tout $(x,y) \in K$ on a $x > 0$, dans notre cas on peut dire que

$$\Sigma = \{(\theta,\gamma) \in \mathbb{R}^2_+ : \gamma \geq \theta^2 \text{ et } \forall\ (x,y) \in K\ \gamma \geq xy + \theta(y-x)\},$$

c'est à dire

$$\Sigma = \{(\theta,\gamma) \in \mathbb{R}^2_+ : \gamma \geq \sup\{\theta^2, \max_{(x,y)\in K} xy + \theta(y-x)\}\}. \tag{4.6}$$

On remarque que si $\theta \geq \max\limits_{(a,b)\in K} b$ alors pour tout $(a,b) \in K$ on a

$$ab + \theta(b-a) \leq \theta a + \theta(b-a) = \theta b \leq \theta^2$$

et donc $\max\limits_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a) \leq \theta^2$.
Si $\theta < \max\limits_{(a,b)\in K} b$ alors, en considérant $(a, \max\limits_{(a,b)\in K} b) \in K$ on a

$$\max_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a) \geq a(\max_{(a,b)\in K} b - \theta) + \theta \max_{(a,b)\in K} b > \theta \max_{(a,b)\in K} b > \theta^2.$$

Si $\theta = \max\limits_{(a,b)\in K} b$ on a $\max\limits_{(a,b)\in K} \{ab + [\max\limits_{(a,b)\in K} b](b-a)\} = [\max\limits_{(a,b)\in K} b]^2$.

D'après cette étude, on peut dire que

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2,$$

où

$$\Sigma_1 = \{(\theta,\gamma) \in \mathbb{R}^2_+ : \theta \in [0, \max_{(a,b)\in K} b], \gamma \geq \max_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a)\}$$
$$\Sigma_2 = \{(\theta,\gamma) \in \mathbb{R}^2_+ : \theta \geq \max_{(a,b)\in K} b, \gamma \geq \theta^2\}.$$

Étape 2 : Étude de la fonction σ *:* On pose

$$g_x(\theta,\gamma) = \frac{\theta x + \gamma}{x + \theta} \quad \text{pour } x \geq 0,$$

et

$$\Gamma_1 = \{(\theta, \max_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a)), \theta \in [0, \max_{(a,b)\in K} b]\}$$
$$\Gamma_2 = \{(\theta, \theta^2), \theta \geq \max_{(a,b)\in K} b\}.$$

On observe que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subset \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. On va montrer que

$$\sigma(x) = \inf_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} g_x(\theta, \gamma).$$

On sait par la proposition 4.2.1 que $\sigma(x) = \inf_{(\theta,\gamma)\in\Sigma} \theta + \dfrac{\gamma - \theta^2}{x + \theta}$. On divise l'étude en $x = 0$ et $x > 0$.
Si $x = 0$

$$\sigma(0) = \inf_{(\theta,\gamma)\in\Sigma} \theta + \frac{\gamma - \theta^2}{\theta} = \inf_{(\theta,\gamma)\in\Sigma} \frac{\gamma}{\theta}.$$

Puisque, fixé θ_0, la fonction $\dfrac{\gamma}{\theta_0}$ est croissante, alors

$$\sigma(0) = \inf_{(\theta,\gamma)\in\Sigma} \frac{\gamma}{\theta} = \inf_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} g_0(\theta, \gamma).$$

Si $x > 0$, $\sigma(x) = \inf_{(\theta,\gamma)\in\Sigma} \theta + \dfrac{\gamma - \theta^2}{x + \theta} = \inf_{(\theta,\gamma)\in\Sigma} g_x(\theta, \gamma)$. On remarque que $\dfrac{\partial g_x}{\partial \gamma} > 0$, ce qui implique que, fixé $\theta_0 \geq 0$, $g_x(\theta_0, \gamma)$ est croissante (en γ), et donc pour $x > 0$

$$\sigma(x) = \inf_{\Sigma} g_x(\theta, \gamma) = \inf_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} g_x(\theta, \gamma).$$

On observe que

$$g_x \mid_{\Gamma_1} = \frac{\theta x + \max\limits_{(a,b)\in K} ab + \theta(b - a)}{x + \theta},$$

et donc

$$\inf_{\Gamma_1} g_x = \inf_{\theta \in [0, \max\limits_{(a,b)\in K} b]} \frac{\theta x + \max\limits_{(a,b)\in K} ab + \theta(b - a)}{x + \theta}.$$

Par ailleurs

$$g_x \mid_{\Gamma_2} = \frac{\theta x + \theta^2}{x + \theta} = \theta, \ \theta \geq \max_{(a,b)\in K} b \ :$$

par conséquent

$$\inf_{\Gamma_2} g_x = \max_{(a,b)\in K} b.$$

Cette étude implique que

$$\sigma(x) = \inf_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} g_x(\theta, \gamma) = \inf \left\{ \inf_{\theta \in [0, \max\limits_{(a,b)\in K} b]} \frac{\theta x + \max\limits_{(a,b)\in K} ab + \theta(b - a)}{x + \theta}, \max_{(a,b)\in K} b \right\}.$$

En remarquant que

$$\frac{x \max\limits_{(a,b)\in K} b + \max\limits_{(a,b)\in K} \{ab + [\max\limits_{(a,b)\in K} b](b - a)\}}{x + \max\limits_{(a,b)\in K} b} = \max_{(a,b)\in K} b,$$

on a

$$\sigma(x) = \inf_{\theta \in [0, \max\limits_{(a,b)\in K} b]} \frac{\theta x + \max\limits_{(a,b)\in K} ab + \theta(b - a)}{x + \theta} = \inf_{\theta \in [0, \max\limits_{(a,b)\in K} b]} \frac{\theta x + m(\theta)}{x + \theta}.$$

On va maintenant prouver que

$$\inf_{\theta\in[0,\max\limits_{(a,b)\in K} b]} \frac{\theta x + m(\theta)}{x+\theta} = \min_{\theta\in[0,\max\limits_{(a,b)\in K} b]} \frac{\theta x + m(\theta)}{x+\theta},$$

c'est à dire la formule de l'énoncé pour la fonction σ. On va diviser l'étude en $x > 0$ et $x = 0$.

Étude de $x > 0$: Pour $x > 0$ fixé la fonction de θ

$$\frac{\theta x + m(\theta)}{x+\theta}$$

est continue pour $\theta \geq 0$ et donc, par le théorème de Weierstrass, l'inf est atteint.

Étude de $x = 0$: Il faut étudier la fonction de θ

$$\frac{m(\theta)}{\theta} = \frac{\max\limits_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a)}{\theta} :$$

on remarque que,

$$\frac{\max\limits_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a)}{\theta} \geq \frac{\max\limits_{(a,b)\in K} ab}{\theta} \to \infty, \theta \to 0.$$

Ceci implique qu'il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que

$$\inf_{\theta\in[0,\max\limits_{(a,b)\in K} b]} \frac{\max\limits_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a)}{\theta} = \inf_{\theta\in[\bar{\varepsilon},\max\limits_{(a,b)\in K} b]} \frac{\max\limits_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a)}{\theta}.$$

Comme la fonction

$$\frac{\max\limits_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a)}{\theta}$$

est continue pour tout $\theta \in [\bar{\varepsilon}, \max\limits_{(a,b)\in K} b]$, par le théorème de Weierstrass on a le résultat. $\square$

En combinant la proposition précédente et la proposition 4.2.1 on a tout de suite

Corollaire 4.2.7. *Soit $K \subset T$ un ensemble compact qui satisfait (4.3). Soit $E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K\}$. Alors, si σ est la fonction définie par (4.5)*

$$\mathrm{Pco}E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) \leq \sigma(\lambda_1(\xi))\}.$$

Dans la proposition suivante, on va étudier l'intérieur de $\mathrm{Pco}\,E$.

Proposition 4.2.8. *Soit $K \subset T$ un ensemble compact qui satisfait (4.3). Soit $E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K\}$. Alors, si σ est la fonction définie par (4.5)*

$$\mathrm{intPco}E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) < \sigma(\lambda_1(\xi))\}.$$

Démonstration. On va démontrer l'égalité de l'énoncé par double inclusion.
étape 1) Pour montrer que

$$\mathrm{intPco}E \supseteq \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) < \sigma(\lambda_1(\xi))\}$$

il suffit de montrer que la fonction σ est continue pour $x \geq 0$, comme les fonctions $\lambda_i(\xi)$ sont continues. Sûrement σ est continue pour $x > 0$. Pour étudier le point $x = 0$, on montrera que si $x_n \to 0^+$, alors $\sigma(x_n) \to \sigma(0)$. Pour $x = 0$ on peut dire qu'il existe $\theta_0 \in (0, \max\limits_{(a,b)\in K} b]$ tel que $\sigma(0) = \frac{m(\theta_0)}{\theta_0}$. Alors

$$\begin{aligned}\sigma(x_n) - \sigma(0) &= \min_{\theta \in [0, \max\limits_{(a,b)\in K} b]} \frac{\theta x_n + m(\theta)}{x_n + \theta} - \frac{m(\theta_0)}{\theta_0} \\ &\leq \frac{\theta_0 x_n + m(\theta_0)}{x_n + \theta_0} - \frac{m(\theta_0)}{\theta_0} \to 0, n \to \infty\,.\end{aligned}$$

On va maintenant montrer que $\sigma(x_n) - \sigma(0) \geq h(x_n)$, avec $h(x_n) \to 0$, si $n \to \infty$. Ceci impliquera la continuité en $x = 0$ de la fonction σ.

Pour tout x_n il existe $\theta_n \in [0, \max\limits_{(a,b)\in K} b]$ tel que

$$\sigma(x_n) = \frac{\theta_n x_n + m(\theta_n)}{x_n + \theta_n}\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}\sigma(x_n) - \sigma(0) &= \frac{\theta_n x_n + m(\theta_n)}{x_n + \theta_n} - \min_{\theta \in [0, \max\limits_{(a,b)\in K} b]} \frac{m(\theta)}{\theta} \\ &\geq \frac{\theta_n x_n + m(\theta_n)}{x_n + \theta_n} - \frac{m(\theta_n)}{\theta_n} = \frac{x_n}{\theta_n(x_n + \theta_n)}[\theta_n^2 - m(\theta_n)]\,.\end{aligned}$$

On prouvera que $h(x_n) = \dfrac{x_n}{\theta_n(x_n + \theta_n)}[\theta_n^2 - m(\theta_n)] \to 0, n \to \infty$. Comme la fonction $\theta \to \theta^2 - m(\theta)$ est continue, $\theta_n^2 - m(\theta_n)$ est une suite bornée : alors il suffira de montrer que

$$\left| \frac{x_n}{\theta_n(x_n + \theta_n)} \right| \to 0\,.$$

On remarque que $\liminf\limits_{n\to\infty} \theta_n > 0$. En fait, si par contradiction $\liminf\limits_{n\to\infty} \theta_n = 0$, alors, quitte à passer une sous-suite θ_{n_k} on a $\lim\limits_{k\to\infty} \theta_{n_k} = 0$ et par conséquent

$$\sigma(x_{n_k}) = \frac{\theta_{n_k} x_{n_k} + m(\theta_{n_k})}{x_{n_k} + \theta_{n_k}} \geq \frac{\sup\limits_{(a,b)\in K} ab}{x_{n_k} + \theta_{n_k}} \to \infty, k \to \infty\,.$$

Or, la matrice

$$\xi_{n_k} = \begin{pmatrix} x_{n_k} & 0 \\ 0 & \sigma(x_{n_k}) \end{pmatrix}$$

possède $\lambda_1(\xi_{n_k}) = x_{n_k}$ et $\lambda_2(\xi_{n_k}) = \sigma(x_{n_k})$, puisque $x_{n_k} \leq \sigma(x_{n_k})$, comme $x_{n_k} \to 0$ et $\sigma(x_{n_k}) \to \infty$. Alors ξ_{n_k} appartient à $\mathrm{Pco}\,E$ et $\lambda_2(\xi_{n_k}) \to \infty$: en rappelant que λ_2 est une norme sur $\mathbb{R}^{2\times 2}$, ceci est une contradiction parce que $\mathrm{Pco}E$ est borné, comme E est borné.

Alors $\liminf_{n\to\infty} \theta_n = a > 0$, ce qui implique par les propriétés de la lim inf que définitivement $\theta_n > \frac{a}{2}$. Par conséquent

$$\left|\frac{x_n}{\theta_n(x_n+\theta_n)}\right| \le \left|\frac{x_n}{\frac{a}{2}(x_n+\frac{a}{2})}\right| \to 0, n \to \infty\,.$$

On a donc montré que $\sigma(x_n) - \sigma(0) \geq h(x_n)$, avec $h(x_n) \to 0$, comme souhaité. *étape 2)* On va démontrer maintenant l'inclusion inverse, c'est à dire

$$\mathrm{intPco}E \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) < \sigma(\lambda_1(\xi))\}\,.$$

Supposons par contradiction qu'il existe une matrice η telle que $\lambda_2(\eta) = \sigma(\lambda_1(\eta))$ et $\eta \in \mathrm{intPco}E$; ceci veut dire qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la boule de centre η et rayon ε, $B_\varepsilon(\eta)$, est contenue dans Pco$E$. Or, soient $A, B \in \mathcal{O}(2)$ telles que

$$A\eta B = \begin{pmatrix} \lambda_1(\eta) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\eta) \end{pmatrix};$$

on définit

$$D = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} B^{-1},$$

où $0 < d < \varepsilon$. Alors on a, par les propriétés des valeurs singulières

$$\begin{aligned} \lambda_1(\eta + D) &= \lambda_1(A\eta B + ADB) = \lambda_1(\eta) \\ \lambda_2(\eta + D) &= \lambda_2(A\eta B + ADB) = \lambda_2(\eta) + d\,. \end{aligned}$$

On remarque que la matrice $\eta + D \in B_\varepsilon(\eta) \subseteq \mathrm{Pco}E$, comme $d < \varepsilon$. Ceci implique que $\lambda_2(\eta + D) \le \sigma(\lambda_1(\eta + D))$; par ailleurs, par construction,

$$\lambda_2(\eta + D) = \lambda_2(\eta) + d = \sigma(\lambda_1(\eta)) + d = \sigma(\lambda_1(\eta + D)) + d > \sigma(\lambda_1(\eta + D))\,,$$

ce qui est absurde. □

Dans le corollaire suivant on va étudier le bord de l'enveloppe polyconvexe.

Corollaire 4.2.9. *Soit $K \subset T$ un ensemble compact qui satisfait (4.3). Soit $E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K\}$. Soit $\xi \in \partial \mathrm{Pco}\, E$. Alors il existe $\overline{\theta} \in [0, \max_{(a,b)\in K} b]$ tel que*

$$\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \overline{\theta}(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) = m(\overline{\theta})\,.$$

Démonstration. Soit $\xi \in \partial \mathrm{Pco}\, E : \xi \in \mathrm{Pco}\, E$, comme $\mathrm{Pco}\, E$ est compact. Par le résultat précédent on sait que ξ doit satisfaire

$$\lambda_2(\xi) = \sigma(\lambda_1(\xi)),$$

ce qui implique le résultat par l'expression de σ. □

On va maintenant montrer l'équivalence entre l'enveloppe rang un convexe et polyconvexe :

Proposition 4.2.10. *Soit $K \subset T$ un ensemble compact qui satisfait (4.3). Soit $E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K\}$. Alors* $\mathrm{Pco}\, E = \mathrm{Rco}\, E$.

Pour ceci il nous sera utile le lemme suivant :

Lemme 4.2.11. *Soit* $K = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\} \subset T$, $0 < a_1 < a_2, a_1 b_1 \leq a_2 b_2, b_2 \leq b_1$, *et* E *défini par (4.2). Alors*

$$\begin{aligned}\operatorname{Rco} E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : & \lambda_2(\xi) \leq b_1, \\ & \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) \leq a_2 b_2 \\ & \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \bar{\theta}(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) \leq a_1 b_1 + \bar{\theta}(b_1 - a_1)\}\end{aligned}$$

où $\bar{\theta} = \dfrac{a_2 b_2 - a_1 b_1}{b_1 - a_1 - b_2 + a_2}$.

Remarque 4.2.12. *Dans [12], (théorème 7.18) il est montré que si l'ensemble* K *est composé par un seul point, alors l'enveloppe polyconvexe de* E *est égale à l'enveloppe rang un convexe de* E. *De plus, si* $K = \{(a, b)\}$

$$\operatorname{Rco} E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) \leq b, \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) \leq ab\} .$$

Démonstration. Tout d'abord on rappelle que dans [7] il est montré que la fonction σ définie par (4.4) pour E est

$$\sigma(x) = \inf\left\{b_1, \frac{a_2 b_2}{x}, \frac{\overline{\theta} x + a_1 b_1 + \overline{\theta}(b_1 - a_1)}{\overline{\theta} + x}\right\}$$

ce qui implique que l'enveloppe polyconvexe est donnée par les matrices qui satisfont

$$\lambda_2(\xi) \leq b_1, \tag{4.7}$$
$$\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) \leq a_2 b_2 \tag{4.8}$$
$$\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \bar{\theta}(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) \leq a_1 b_1 + \bar{\theta}(b_1 - a_1) . \tag{4.9}$$

Or, pour montrer le résultat, il faut prouver l'inclusion non triviale $\mathrm{Pco}E \subseteq \mathrm{Rco}E$. On remarque que pour ceci il suffit de montrer que

$$\partial \mathrm{Pco}E \subseteq \mathrm{Rco}E :$$

en fait, soit $\xi \in \mathrm{int}\mathrm{Pco}E$; pour tout λ de rang un, comme $\mathrm{Pco}E$ est compact, il existe $t_1 = t_1(\lambda) < 0 < t_2 = t_2(\lambda)$ tels que $\xi + t_i\lambda \in \partial\mathrm{Pco}E \subseteq \mathrm{Rco}E, i = 1, 2$ comme on montrera. En posant $\xi_i = \xi + t_i\lambda, i = 1, 2$, on a que

$$\xi = \frac{t_2\xi_1 - t_1\xi_2}{t_2 - t_1} \in \mathrm{Rco}E ,$$

comme $rg(\xi_1 - \xi_2) = 1$.

Or, soit $\xi \in \partial\mathrm{Pco}E$: alors, comme $\lambda_2(\xi) = \sigma(\lambda_1(\xi))$, ξ satisfait (4.7) ou (4.8) ou (4.9) avec égalité. On va traiter ces cas séparément (étapes 1, 2, 3 respectivement) pour montrer que $\xi \in \mathrm{Rco}E$. On peut supposer, à une transformation orthogonale près, que ξ soit diagonale, parce que $\mathrm{Rco}E$ est isotrope : en fait il n'est pas difficile à voir par induction que les ensembles $\mathrm{R}_i\mathrm{co}\, E$ définis dans la proposition 3.2.4 sont isotropes pour tout i et donc $\mathrm{Rco}E$ aussi.

étape 1) Si ξ satisfait (4.7) avec égalité, alors il est facile de voir que (4.9) implique que $\lambda_1(\xi) \leq a_1$; donc $\xi \in \mathrm{Rco}E$, car

$$\xi = \begin{pmatrix} \lambda_1(\xi) & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + (1 - t)\begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, t \in (0, 1) .$$

On remarque qu'on a pas utilisé l'inégalité (4.8).

Cette étude implique que dans les étapes suivantes on peut supposer que ξ satisfait (4.7) avec inégalité stricte.

étape 2) On suppose que ξ satisfait (4.8) avec égalité. Par ailleurs on peut supposer que ξ satisfait (4.9) avec inégalité stricte, sinon il est facile de voir que

$$\xi = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in E$$

(on remarque qu'on n'a pas utilisé l'inégalité (4.7)). Si on définit

$$V = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) = a_2 b_2\},\ Y = V \cap \partial \mathrm{Pco}E$$

on a que $\xi \in \mathrm{int\ rel}Y$ (l'intérieur relatif). Soit

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda_2(\xi)}{\lambda_1(\xi)} \\ 1 & -\frac{\lambda_2(\xi)}{\lambda_1(\xi)} \end{pmatrix} :$$

alors $rg(Z) = 1$ et $\lambda_1(\xi + tZ)\lambda_2(\xi + tZ) = \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) = a_2 b_2\ \forall\ t \in \mathbb{R}$. Comme Y est compact, il existe $t_1 < 0 < t_2 : \xi + t_i Z \in \partial Y, i = 1, 2$. Par conséquent $\xi + t_i Z$ satisfait (4.7) et (4.8) ou (4.9) et (4.8) avec égalité : de l'étape 1 et du raisonnement précédent on obtient que $\xi + t_i Z \in \mathrm{Rco}E, i = 1, 2$ et donc $\xi \in \mathrm{Rco}E$.

étape 3) Supposons que ξ satisfasse (4.9) avec égalité ; on peut supposer que (4.7) et (4.8) soient satisfaits avec inégalité stricte. Par simplicité de notations on écrira $(x, y) = (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi))$ dans cette étape. On va maintenant prouver que la matrice de rang un

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\dfrac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta}} \\ -\sqrt{\dfrac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta}} & -\dfrac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta} \end{pmatrix}$$

a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} &\lambda_1(\xi+tA)\lambda_2(\xi+tA) + \bar\theta[\lambda_2(\xi+tA) - \lambda_1(\xi+tA)] = xy + \bar\theta[y-x] \\ &\forall\ t \in [t_-, t_+],\ t_- = -\frac{xy(x+\bar\theta)}{\bar\theta(x+y)},\ t_+ = \frac{(y-x)(x+\bar\theta)}{x+y}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

On observe tout d'abord que A est bien définie parce que $y > \overline{\theta}$. En fait (x, y) satisfait $xy+\overline{\theta}(y-x) = a_2b_2+\overline{\theta}(b_2-a_2)$, ce qui implique que $\overline{\theta} < y$ si et seulement si $y > b_2$. On peut supposer que $y > b_2$, parce que sinon on aurait $y \leq b_2$ et $xy \leq a_2 b_2$, et donc $\xi \in \mathrm{Rco}\, F$, où $F = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) = (a_2, b_2)\}$.

On a par les propriétés des valeurs singulières (voir Appendice)

$$\begin{aligned} &\lambda_1(\xi+tA)\lambda_2(\xi+tA) = |\det(\xi+tA)| = \left| xy - xt\frac{y-\overline{\theta}}{x+\overline{\theta}} + ty \right|; \\ &(\lambda_2(\xi+tA) - \lambda_1(\xi+tA))^2 = \|\xi+tA\|^2 - 2|\det(\xi+tA)| \\ &= (x+t)^2 + \left(y - t\frac{y-\overline{\theta}}{x+\overline{\theta}}\right)^2 + 2t^2\frac{y-\overline{\theta}}{x+\overline{\theta}} - 2\left| xy - xt\frac{y-\overline{\theta}}{x+\overline{\theta}} + ty \right|. \end{aligned}$$

En supposant que $xy - xt\dfrac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta} + ty \geq 0$ (c'est à dire $t \geq t_-$) (4.10) est équivalent à montrer que

$$\bar\theta(y-x) + xt\frac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta} - ty = \bar\theta\sqrt{\|\xi+tA\|^2 - 2[\det(\xi+tA)]}\,.$$

Si on suppose que $\bar\theta(y-x) + xt\dfrac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta} - yt \geq 0$ (c'est à dire $t \leq t_+$) on peut élever au carré pour obtenir

$$t^2x^2\left(\frac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta}\right)^2 + t^2y^2 + 2\bar\theta(y-x)xt\frac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta} - 2\bar\theta(y-x)yt - 2t^2xy\frac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta} =$$
$$\bar\theta^2\left[t^2 + 2xt + t^2\left(\frac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta}\right)^2 - 2yt\frac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta} + 2t^2\frac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta} + 2xt\frac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta} - 2yt\right].$$

On remarque facilement que les termes en t et en t^2 sont nuls. En fait pour les termes en t on a

$$2\bar\theta(y-x)xt\frac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta} - 2\bar\theta(y-x)yt = \bar\theta^2\left[2xt - 2yt\frac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta} + 2xt\frac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta} - 2yt\right]$$

ce qui est vérifié pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour les termes en t^2 on a

$$t^2x^2\left(\frac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta}\right)^2 + t^2y^2 - 2t^2xy\frac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta} = \bar\theta^2\left[t^2 + t^2\left(\frac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta}\right)^2 + 2t^2\frac{y-\bar\theta}{x+\bar\theta}\right]$$

ce qui est vérifié pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a par conséquent prouvé que la matrice A satisfait (4.10).

On va maintenant montrer qu'il existe $t_1 \in [t_-, 0]$ tel que $\lambda_2(\xi + t_1A) = b_1$: ceci implique que $\xi + t_1A$ satisfait (4.7) et (4.9) avec égalité : par conséquent $\xi + t_1A \in \mathrm{Rco}E$ comme vu dans la première étape. Par ailleurs on va montrer aussi qu'il existe $t_2 \in [0, t_+]$ telle que $\lambda_1(\xi + t_2A)\lambda_2(\xi + t_2A) = a_2b_2$: ceci implique que $\xi + t_2A$ satisfait (4.8) et (4.9) avec égalité : par conséquent $\xi + t_2A \in \mathrm{Rco}E$ comme vu dans la deuxième étape. Comme ξ peut être écrit comme combinaison rang un convexe de $\xi + t_1A$ et $\xi + t_2A$, alors $\xi \in \mathrm{Rco}E$.

Existence de t_1) On considère $F(t) = \lambda_2(\xi + tA) - b_1$: cette fonction est continue et $F(0) < 0 < F(t_-)$. En fait, $F(0) = y - b_1 < 0$. Par ailleurs, puisque $\det(\xi + t_-A) = 0$, on a grâce à l'expression de λ_2 (voir Appendice)

$$\begin{aligned}
&F(t_-) = \|\xi + t_-A\| - b_1 > 0 \iff \\
&b_1 < \|\xi + t_-A\| = \\
&= \sqrt{\left(\frac{x^2(\bar\theta-y)}{\bar\theta(x+y)}\right)^2 + \left(\frac{y^2(\bar\theta+x)}{\bar\theta(x+y)}\right)^2 + 2\frac{x^2y^2(x+\bar\theta)(y-\bar\theta)}{\bar\theta^2(x+y)^2}} \\
&= \frac{x^2(y-\bar\theta) + y^2(\bar\theta+x)}{\bar\theta(x+y)} = \frac{xy + \bar\theta(y-x)}{\bar\theta}\,.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est équivalente à

$$\bar\theta b_1 \leq xy + \bar\theta(y-x) = a_1b_1 + \bar\theta(b_1 - a_1) \iff b_1 \geq \bar\theta$$

ce qui est vrai. Par la continuité de F on a l'existence d'un $t_1 < 0$ tel que $\lambda_2(\xi + t_1 A) = b_1$.

On va maintenant prouver l'existence de t_2 :

Existence de t_2) On considère la fonction $G(t) = \lambda_1(\xi + tA)\lambda_2(\xi + tA) - a_2 b_2$: elle est continue, et on va prouver que $G(0) < 0 < G(t_+)$; donc il va exister $t_2 \in [0, t_+]$ telle que $G(t_2) = 0$. Sûrement $G(0) < 0$, parce que $\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) < a_2 b_2$. Par ailleurs $G(t_+) > 0$ si et seulement si

$$\left| xy - xt_+ \frac{y - \bar{\theta}}{x + \bar{\theta}} + yt_+ \right| \geq a_2 b_2$$

ce qui est équivalent, grâce à l'expression de t_+, à

$$\left| xy - x\frac{(y - \bar{\theta})(y - x)}{x + y} + y\frac{(x + \bar{\theta})(y - x)}{x + y} \right| \geq a_2 b_2$$

c'est à dire , en utilisant le fait que $xy + \overline{\theta}(y - x) = a_2 b_2 + \bar{\theta}(b_2 - a_2)$

$$xy(x + y) + \bar{\theta}(y - x)(y + x) \geq a_2 b_2 (x + y) \Longleftrightarrow a_2 b_2 + \bar{\theta}(b_2 - a_2) \geq a_2 b_2$$

ce qui est vérifié. $\square$

On va maintenant montrer la proposition 4.2.10. Dans la preuve on utilisera la notion de sous-différentiel d'une fonction, dont on rappelle la définition :

Définition 4.2.13. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Le sous-différentiel de F en $\overline{\theta}$ est l'ensemble*

$$\partial f(\overline{\theta}) = \{\theta^* \in \mathbb{R} : f(\theta) \geq f(\overline{\theta}) + \theta^*(\theta - \overline{\theta}) \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}\} .$$

Dans la proposition suivante on va rappeler des propriétés du sous-différentiel.

Proposition 4.2.14. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors :*
i) $\partial f(\theta)$ est non vide, borné, fermé et convexe pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
ii) Si θ est un point de dérivabilité de la fonction f alors l'ensemble $\partial f(\theta) = \{f'(\theta)\}$.
iii) L'ensemble des points de dérivabilité de la fonction f est dense en $\mathbb{R}$ et

$$\partial f(x) = \mathrm{co}\,\overline{S(x)}\,,\ \ S(x) = \{\lim_{n\to\infty} f'(x_n)\ \ f \, \textit{dérivable en}\ x_n, x_n \to x\} .$$

Démonstration. Voir page 218 de [30] pour la preuve du point i), pour le point ii) théorème 25.1 dans [30]. Le point iii) est une conséquence immédiate des théorèmes 25.5 et 25.6 dans [30] et du fait que si E est un ensemble borné alors $\overline{\mathrm{co}\, E} = \mathrm{co}\,\overline{E}$ (voir remarque 3.2.6). $\square$

Démonstration. Comme dans le lemme précédent il suffit de montrer l'inclusion

$$\partial \mathrm{Pco}\, E \subseteq \mathrm{Rco}\, E.$$

Soit $\xi \in \partial\mathrm{Pco}\, E$. On a vu dans le corollaire 4.2.9 que si $\xi \in \partial\mathrm{Pco}\, E$ alors il existe $\overline{\theta} \in [0, \max_{(a,b)\in K} b]$ tel que

$$\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \overline{\theta}(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) = m(\overline{\theta}) .$$

Sûrement, comme $\xi \in \mathrm{Pco}\, E$ on peut dire que

$$\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \theta(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) \leq m(\theta), \quad \forall\, \theta \in [0, \max_{(a,b)\in K} b]\,. \tag{4.11}$$

On va définir $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme

$$F(\theta) = \begin{cases} \max\limits_{(a,b)\in K} ab & \theta \leq 0 \\ m(\theta) & \theta \in [0, \max\limits_{(a,b)\in K} b] \\ \theta^2 & \theta \geq \max\limits_{(a,b)\in K} b\,. \end{cases}$$

Puisque $\xi \in \partial \mathrm{Pco}\, E$ on peut dire alors qu'il existe $\overline{\theta} \in [0, \max_{(a,b)\in K} b]$ tel que

$$\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \overline{\theta}(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) = F(\overline{\theta})\,.$$

Par ailleurs

$$\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \theta(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) \leq F(\theta), \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}\,.$$

En fait si $\theta \leq 0$, comme $\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) \leq \max_{(a,b)\in K} ab$ (il suffit de choisir $\theta = 0$ dans (4.11)), alors $\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \theta(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) \leq \max_{(a,b)\in K} ab\,.$
Pour $\theta \in [0, \max_{(a,b)\in K} b]$ cette inégalité est vérifiée (voir (4.11)).
Si $\theta \geq \max_{(a,b)\in K} b$ on a $\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \theta(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) \leq \theta^2$ si et seulement si $\theta \geq \lambda_2(\xi)$: ceci est vrai parce que $\lambda_2(\xi) \leq \max_{(a,b)\in K} b (\leq \theta)$ (il suffit de choisir dans (4.11) $\theta = \max_{(a,b)\in K} b$ et rappeler que $[\max_{(a,b)\in K} b]^2 = m(\max_{(a,b)\in K} b)$, comme vu dans la proposition 4.2.6, étape 1).

Pour démontrer que $\xi \in \mathrm{Rco}\, E$ il nous sera utile d'étudier le sous-différentiel de F en $\bar{\theta}$. On utilisera les observations suivantes sur $\partial F(\overline{\theta})$.
• On remarque d'abord que F est convexe. En fait pour $\theta \geq 0$

$$F(\theta) = \sup\{\theta^2, \max_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a)\},$$

(comme vu dans la proposition 4.2.6) qui est convexe, comme elle est sup de fonctions convexes ; puisque $F(\theta)$ pour $\theta \geq 0$ atteint son minimum en $\theta = 0$, où elle vaut $\max_{(a,b)\in K} ab$, alors F est convexe pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Par la proposition 4.2.14 $\partial F(\overline{\theta})$ est un ensemble non vide, borné, fermé et convexe (voir [30]), et donc il est du type $[\alpha(\overline{\theta}), \beta(\overline{\theta})]$.
• Évidemment si $\overline{\theta}$ est un point de dérivabilité pour la fonction F alors $\alpha(\overline{\theta}) = \beta(\overline{\theta})$. On peut dire aussi que $\alpha(\overline{\theta}) = \beta(\overline{\theta}) = \bar{b} - \bar{a}$ pour un certain $(\bar{a}, \bar{b}) \in K$. En fait il existe $(\bar{a}, \bar{b}) \in K$ tel que $F(\overline{\theta}) = \max_{(a,b)\in K} ab + \overline{\theta}(b-a) = \bar{a}\bar{b} + \overline{\theta}(\bar{b} - \bar{a})\,.$ Comme $\bar{b} - \bar{a} \in \partial F(\overline{\theta})$, et $\partial F(\overline{\theta})$ est composé par un seul point, alors $F'(\overline{\theta}) = \bar{b} - \bar{a}\,.$
• On voit facilement que $\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi) \in \partial F(\overline{\theta})$.

On va maintenant montrer que $\xi \in \mathrm{Rco}\, E$. On trouvera un ensemble $a \subset K$ composé par un ou deux points (selon la nature du point $\overline{\theta}$) tel que si $A = \{\xi \in$

$\mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in a\}$ alors $\xi \in \mathrm{Pco}A$. Par le lemme précédent $\mathrm{Pco}A = \mathrm{Rco}A$ et donc

$$\xi \in \mathrm{Rco}A \subseteq \mathrm{Rco}E\,.$$

On va diviser l'étude en trois étapes où on va distinguer les cas où $\overline{\theta} = 0$, $\overline{\theta} \in (0, \max\limits_{(a,b)\in K} b)$, $\overline{\theta} = \max\limits_{(a,b)\in K} b$.

étape 1) On va étudier le cas $\overline{\theta} = 0$, dans lequel $\max\limits_{(a,b)\in K} ab = \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi)$. On étudie l'ensemble $S(0)$, selon les notations de la proposition 4.2.14 :

$$S(0) = \{\lim_{n\to\infty} F'(\theta_n), \theta_n \to 0\} = \{\lim_{n\to\infty} F'(\theta_n), \theta_n \to 0^+\} \cup \{0\}$$

comme pour tout $\theta < 0$ F est constante. Soit

$$p_M = \sup\{\lim_{n\to\infty} F'(\theta_n), \theta_n \to 0^+\}\,.$$

Comme on a vu précédemment $F'(\theta_n) = b_n - a_n$, si $\theta_n \to 0^+$, pour certains $(a_n, b_n) \in K$. Le fait que K soit compact implique que tout point de $S(0)$ est du type $b - a$, avec $(a, b) \in K$. Or, par définition de p_M, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \in K$ avec $b_\varepsilon - a_\varepsilon \in S(0)$ tel que

$$b_\varepsilon - a_\varepsilon \leq p_M \leq \varepsilon + b_\varepsilon - a_\varepsilon\,.$$

Or, $(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \in K$ qui est compact. A une sous-suite près on peut dire que $(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \to (\bar{a}, \bar{b}) \in K$; par conséquent, en passant à la limite dans l'inégalité précédente on obtient $p_M = \bar{b} - \bar{a}\,, (\bar{a}, \bar{b}) \in K$.
On a alors par la proposition 4.2.14,

$$\partial F(0) = \mathrm{co}\overline{S(0)} = [0, \bar{b} - \bar{a}] \ni \lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)\,.$$

On va maintenant montrer qu'il existe $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in K$ tel que $\bar{b} - \bar{a} = \tilde{b} - \tilde{a}$ et $\max\limits_{(a,b)\in K} ab = \tilde{a}\tilde{b}$. Ceci sera utile pour montrer que $\xi \in \mathrm{Rco}\,E$.

Comme $\bar{b} - \bar{a} = \sup\{\lim\limits_{n\to\infty} F'(\theta_n), \theta_n \to 0^+\}$ alors $\forall\,\varepsilon > 0$ il existe une suite θ_n^ε qui tend vers 0 pour $n \to \infty$ et une suite $(a_n^\varepsilon, b_n^\varepsilon) \in K$ telle que

$$\bar{b} - \bar{a} - \varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} F'(\theta_n^\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} b_n^\varepsilon - a_n^\varepsilon \leq \bar{b} - \bar{a}. \tag{4.12}$$

On remarque que, comme θ_n^ε est un point de dérivabilité pour F

$$\max_{(a,b)\in K} ab + \theta_n^\varepsilon(b - a) = a_n^\varepsilon b_n^\varepsilon + \theta_n^\varepsilon(b_n^\varepsilon - a_n^\varepsilon)\,.$$

On va maintenant passer à la limite dans cette relation. Or, si on considère les points $(a_n^\varepsilon, b_n^\varepsilon) \in K$, comme K est compact, à une sous-suite près on peut dire que $(a_n^\varepsilon, b_n^\varepsilon) \to (a^\varepsilon, b^\varepsilon) \in K$. Pour le même raisonnement, si $\varepsilon \to 0$ $(a^\varepsilon, b^\varepsilon) \to (\tilde{a}, \tilde{b}) \in K$. Alors en passant à la limite pour $n \to \infty$ dans la dernière relation on obtient par la continuité en θ de la fonction $\max\limits_{(a,b)\in K} ab + \theta(b - a)$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{(a,b)\in K} ab + \theta_n^\varepsilon(b - a) = \max_{(a,b)\in K} ab = \lim_{n\to\infty} a_n^\varepsilon b_n^\varepsilon + \theta_n^\varepsilon(b_n^\varepsilon - a_n^\varepsilon) = a^\varepsilon b^\varepsilon\,,$$

et donc

$$\max_{(a,b)\in K} ab = \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0} a^\varepsilon b^\varepsilon = \tilde{a}\tilde{b}\,.$$

De la relation (4.12) on a, à la limite pour $\varepsilon \to 0$

$$\bar{b} - \bar{a} \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} b_n^\varepsilon - a_n^\varepsilon = \tilde{b} - \tilde{a} \leq \bar{b} - \bar{a} \Longleftrightarrow \bar{b} - \bar{a} = \tilde{b} - \tilde{a}\,.$$

On a alors que $\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) = \tilde{a}\tilde{b}$ et $\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi) \leq \tilde{b} - \tilde{a}$, c'est à dire $\lambda_2(\xi) \leq \tilde{b}$. Ceci est équivalent à dire que $\xi \in \mathrm{Rco}A \subseteq \mathrm{Rco}E$, où

$$A = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) = (\tilde{a}, \tilde{b})\}\,.$$

étape 2) On va étudier le cas $\overline{\theta} \in (0, \max_{(a,b)\in K} b)$. Comme dans l'étape 1 si

$$\begin{aligned} p_m &= \inf\{\lim_{n\to\infty} F'(\theta_n), \theta_n \to \overline{\theta}\} \\ p_M &= \sup\{\lim_{n\to\infty} F'(\theta_n), \theta_n \to \overline{\theta}\}\,, \end{aligned}$$

on a que

$$\partial F(\overline{\theta}) = [b_1 - a_1, b_2 - a_2],\ \ (a_i, b_i) \in K,\ i = 1, 2.$$

On va maintenant montrer qu'il existe $(\tilde{a}_i, \tilde{b}_i) \in K, i = 1, 2$ tels que

$$\max_{(a,b)\in K} ab + \overline{\theta}(b-a) = \tilde{a}_i\tilde{b}_i + \overline{\theta}(\tilde{b}_i - \tilde{a}_i),\ \ \tilde{b}_i - \tilde{a}_i = b_i - a_i.$$

Comme $b_2 - a_2 = \sup\{\lim_{n\to\infty} F'(\theta_n), \theta_n \to \overline{\theta}\}$ alors $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe une suite θ_n^ε qui tend vers $\overline{\theta}$ pour $n \to \infty$ et une suite $(a_n^\varepsilon, b_n^\varepsilon) \in K$ telle que

$$b_2 - a_2 - \varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} F'(\theta_n^\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} b_n^\varepsilon - a_n^\varepsilon \leq b_2 - a_2 \tag{4.13}$$

On remarque que

$$\max_{(a,b)\in K} ab + \theta_n^\varepsilon(b-a) = a_n^\varepsilon b_n^\varepsilon + \theta_n^\varepsilon(b_n^\varepsilon - a_n^\varepsilon)\,.$$

On va maintenant passer à la limite dans cette relation. Or, si on considère les points $(a_n^\varepsilon, b_n^\varepsilon) \in K$, comme K est compact, à une sous-suite près on peut dire que $(a_n^\varepsilon, b_n^\varepsilon) \to (a^\varepsilon, b^\varepsilon) \in K$. Pour le même raisonnement $(a^\varepsilon, b^\varepsilon) \to (\tilde{a_2}, \tilde{b_2}) \in K$ pour $\varepsilon \to 0$. Alors en passant à la limite dans la dernière relation on obtient

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\max_{(a,b)\in K} ab + \theta_n^\varepsilon(b-a) = \max_{(a,b)\in K} ab + \overline{\theta}(b-a) \\ &= \lim_{n\to\infty} a_n^\varepsilon b_n^\varepsilon + \theta_n^\varepsilon(b_n^\varepsilon - a_n^\varepsilon) = a^\varepsilon b^\varepsilon + \overline{\theta}(b^\varepsilon - a^\varepsilon)\,. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Par ailleurs par (4.13) on a, en passant à la limite pour $\varepsilon \to 0$

$$b_2 - a_2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} b_n^\varepsilon - a_n^\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} b^\varepsilon - a^\varepsilon = \tilde{b_2} - \tilde{a_2}\,.$$

En passant à la limite pour $\varepsilon \to 0$ dans (4.14) on tire que

$$\begin{aligned} &\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \overline{\theta}(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) = \max_{(a,b)\in K} ab + \overline{\theta}(b-a) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} a^\varepsilon b^\varepsilon + \overline{\theta}(b^\varepsilon - a^\varepsilon) = \tilde{a_2}\tilde{b_2} + \overline{\theta}(\tilde{b_2} - \tilde{a_2})\,. \end{aligned}$$

Analoguement on peut trouver $(\tilde{a_1}, \tilde{b_1}) \in K$ tel que

$$\begin{aligned} &\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \overline{\theta}(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) = \max_{(a,b)\in K} ab + \overline{\theta}(b-a) \\ &= \tilde{a_1}\tilde{b_1} + \overline{\theta}(\tilde{b_1} - \tilde{a_1}),\ \ \tilde{b_1} - \tilde{a_1} = b_1 - a_1\,. \end{aligned}$$

Ces considérations sont utiles pour prouver que $\xi \in \mathrm{Rco}\, A$, où

$$A = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) = (\tilde{a_i}, \tilde{b_i}),\ i = 1, 2\}\,.$$

On prouvera que $\tilde{b_1} \le \tilde{b_2}$, $\tilde{a_1}\tilde{b_1} \le \tilde{a_2}\tilde{b_2}$; par conséquent $\tilde{a_1} \ge \tilde{a_2}$. Ceci implique, grâce au lemme précédent que Rco$A$ est l'ensemble des matrices $\eta \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telles que

$$\begin{cases} \lambda_2(\xi) \le \tilde{b_1}, \\ \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) \le \tilde{a_2}\tilde{b_2}\,, \\ \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \overline{\theta}(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) \le \tilde{a_1}\tilde{b_1} + \overline{\theta}(\tilde{b_1} - \tilde{a_1})\,. \end{cases} \tag{4.15}$$

Comme pour tout $\theta \in [0, \max\limits_{(a,b)\in K} b]$ on a que $\theta^2 \le m(\theta)$ (voir proposition 4.2.6), alors ceci est vrai aussi pour $\theta = \overline{\theta}$ ce qui implique que $\overline{\theta}^2 \le \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \overline{\theta}(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi))$ et donc

$$\lambda_2(\xi) > \overline{\theta} = \frac{\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) - \tilde{a_2}\tilde{b_2}}{\tilde{b_2} - \tilde{a_2} - \lambda_2(\xi) + \lambda_1(\xi)} = \frac{\tilde{a_1}\tilde{b_1} - \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi)}{\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi) - \tilde{b_1} + \tilde{a_1}}\,.$$

Ceci entraîne que $\tilde{b_1} < \lambda_2(\xi) < \tilde{b_2}$, c'est à dire la première condition de (4.15) est vérifiée. Pour la deuxième, puisque $\tilde{b_1} - \tilde{a_1} \le \lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi) \le \tilde{b_2} - \tilde{a_2}$, alors, comme les droites $\tilde{a_i}\tilde{b_i} + \overline{\theta}(\tilde{b_i} - \tilde{a_i})$ et $\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \theta(\lambda_1(\xi) - \lambda_2(\xi))$ ont un point d'intersection $\overline{\theta} > 0$, alors $\tilde{a_2}\tilde{b_2} \le \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) \le \tilde{a_1}\tilde{b_1}$. La troisième condition est vérifiée avec l'égalité. On a donc le résultat.
étape 3) On va étudier le cas $\overline{\theta} = \max\limits_{(a,b)\in K} b$, où $\lambda_2(\xi) = \max\limits_{(a,b)\in K} b$. On définit

$$p_m = \inf\{\lim_{n\to\infty} F'(\theta_n), \theta_n \to \overline{\theta}\}$$

et avec le même raisonnement que dans les étapes 1 et 2 on a que

$$\partial F(\overline{\theta}) = [\bar{b} - \bar{a}, \beta(\overline{\theta})]\,, (\bar{a}, \bar{b}) \in K\,.$$

Comme dans l'étape 2 on arrive à montrer qu'il existe $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in K$ tel que $\bar{b} - \bar{a} = \tilde{b} - \tilde{a}$ et $\max\limits_{(a,b)\in K} ab + \overline{\theta}(b - a) = [\max\limits_{(a,b)\in K} b]^2 = \tilde{a}\tilde{b} + \overline{\theta}(\tilde{b} - \tilde{a})$. Donc $\tilde{b} = \max\limits_{(a,b)\in K} b$.
En posant

$$A = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) = (\tilde{a}, \tilde{b})\}$$

on a que $\xi \in \mathrm{Rco}\, A \subseteq \mathrm{Rco}\, E$: en fait, comme $\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi) \in \partial F(\overline{\theta})$, $\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi) \ge \tilde{b} - \tilde{a} = \max\limits_{(a,b)\in K} b - \tilde{a}$, c'est à dire $\lambda_1(\xi) \le \tilde{a}$, et on a $\lambda_2(\xi) = \tilde{b}$. □

On peut passer maintenant à la preuve du théorème 4.2.5.

Démonstration. La représentation de Rco$E$ suit tout de suite des propositions 4.2.10, 4.2.6. Pour l'intérieur il suffit d'utiliser la proposition 4.2.8. □

4.3 Le théorème d'existence selon la méthode de la catégorie de Baire

On va montrer le théorème d'existence 4.1.1. Pour ceci il suffit de montrer la propriété d'approximation (voir définition 3.4.1).

Théorème 4.3.1. *Soit $K \subset T$ un ensemble compact qui satisfait (4.3). Soit $E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K\}$. Alors E et* $\mathrm{Rco}E$ *ont la propriété d'approximation avec $K(E_\delta) = \mathrm{Rco}E_\delta$, si, pour $0 < \delta \leq \min_{(a,b)\in K} a/2$,*

$$E_\delta = \bigcup_{(a,b)\in K} E_\delta^{(a,b)}, \text{ où } E_\delta^{(a,b)} = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) = (a-\delta, b-\delta)\}.$$

Démonstration. Nous allons vérifier les trois conditions de la propriété d'approximation :

1)$\mathbf{Rco}(\boldsymbol{E_\delta}) \subset \mathbf{intRco}\boldsymbol{E}\ \forall\ \boldsymbol{\delta > 0}$: Soit $(a,b) \in K$ fixé. Sûrement

$$\begin{aligned}
&E_\delta^{(a,b)} \subseteq \mathrm{int}\ \mathrm{Rco}\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) = (a,b)\}\\
&= \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) < ab,\ \lambda_2(\xi) < b\}\\
&\subseteq \mathrm{int}\ \mathrm{Rco}E,
\end{aligned}$$

ce qui implique, si on passe à l'union sur les points de K, que

$$E_\delta \subseteq \mathrm{int}\ \mathrm{Rco}E\,.$$

De cette inclusion on tire alors que

$$\mathrm{Rco}E_\delta \subseteq \mathrm{Rco}(\mathrm{int}\ \mathrm{Rco}E) = \mathrm{int}\ \mathrm{Rco}E\,,$$

parce que l'intérieur de $\mathrm{Rco}\,E$ est rang un convexe. En fait, soient $\xi, \xi + A \in \mathrm{int}\,\mathrm{Rco}E$, avec $rg(A) = 1$, c'est à dire pour tout $\theta \in [0, \max_{(a,b)\in K} b]$

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \theta(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) < \max_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a)\\
&\lambda_1(\xi+A)\lambda_2(\xi+A) + \theta(\lambda_2(\xi+A) - \lambda_1(\xi+A)) < \max_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a)\,.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

On veut montrer que

$$\xi + sA \in \mathrm{int}\,\mathrm{Rco}E, s \in [0,1].$$

Sûrement $\xi + sA \in \mathrm{Rco}E$, parce que $\xi, \xi + A \in \mathrm{Rco}E$. Or, supposons par contradiction qu'il existe $\overline{\theta} \in [0, \max_{(a,b)\in K} b]$ tel que

$$\max_{(a,b)\in K} ab + \overline{\theta}(b-a) = \lambda_1(\xi+sA)\lambda_2(\xi+sA) + \overline{\theta}(\lambda_2(\xi+sA) - \lambda_1(\xi+sA))\,. \tag{4.17}$$

On peut supposer que $\overline{\theta} \neq \max_{(a,b)\in K} b$. En fait on rappelle que

$$[\max_{(a,b)\in K} b]^2 = \max_{(a,b)\in K} ab + [\max_{(a,b)\in K} b](b-a)$$

(comme vu dans la proposition 4.2.6) ; par conséquent si on choisi $\theta = \max_{(a,b)\in K} b$ dans (4.16) et dans (4.17) on a $\lambda_2(\xi), \lambda_2(\xi + A) < \max_{(a,b)\in K} b$ et $\lambda_2(\xi + sA) =$

$\max\limits_{(a,b)\in K} b$. Mais ceci est une contradiction par la convexité de λ_2 (voir Appendice) parce que

$$\max_{(a,b)\in K} b = \lambda_2(\xi + sA) \leq s\lambda_2(\xi + A) + (1-s)\lambda_2(\xi) < \max_{(a,b)\in K} b.$$

Alors comme on a vu dans l'étape 1 de la proposition 4.2.6

$$\overline{\theta}^2 < \max_{(a,b)\in K} ab + \overline{\theta}(b-a) = \lambda_1(\xi+sA)\lambda_2(\xi+sA) + \overline{\theta}(\lambda_2(\xi+sA) - \lambda_1(\xi+sA)) .$$

En utilisant l'expression de la fonction $H_{\overline{\theta}}$ définie dans la proposition 4.2.4, on peut écrire

$$H_{\overline{\theta}}(\xi + sA) = \max_{(a,b)\in K} ab + \overline{\theta}(b-a) - \overline{\theta}^2 > 0.$$

Grâce au fait que $H_{\overline{\theta}}(\xi)$ est rang un convexe, d'après la proposition 4.2.4

$$0 < H_{\overline{\theta}}(\xi + sA) \leq sH_{\overline{\theta}}(\xi + A) + (1-s)H_{\overline{\theta}}(\xi) \leq \max\{H_{\overline{\theta}}(\xi), H_{\overline{\theta}}(\xi + A)\} .$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $\max\{H_{\overline{\theta}}(\xi), H_{\overline{\theta}}(\xi+A)\} = H_{\overline{\theta}}(\xi+A)$. Or, si $H_{\overline{\theta}}(\xi + A) = 0$ on a déjà une contradiction de l'inégalité précédente. Si $H_{\overline{\theta}}(\xi + A) > 0$, on a, puisque $\xi + A \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$

$$\begin{aligned} &H_{\overline{\theta}}(\xi + A) = \lambda_1(\xi + A)\lambda_2(\xi + A) + \overline{\theta}(\lambda_2(\xi + A) - \lambda_1(\xi + A)) - \overline{\theta}^2 \\ &< \max_{(a,b)\in K} ab + \overline{\theta}(b-a) - \overline{\theta}^2 \end{aligned}$$

et alors on a obtenu

$$H_{\overline{\theta}}(\xi+sA) = \max_{(a,b)\in K} ab + \overline{\theta}(b-a) - \overline{\theta}^2 \leq H_{\overline{\theta}}(\xi+A) < \max_{(a,b)\in K} ab + \overline{\theta}(b-a) - \overline{\theta}^2$$

ce qui est une contradiction.

2)$\boldsymbol{\forall\ \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0 : \mathrm{dist}(\eta, E) \leq \varepsilon\ \forall\ \ \eta \in E_\delta, \delta \in [0, \delta_0] :}$ Soit $\eta \in E_\delta$; alors il existe $(a, b) \in K$ tel que

$$\eta \in \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) = (a - \delta, b - \delta)\} .$$

On définit

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E .$$

Soient $A, B \in \mathcal{O}(2)$ telles que $A\eta B = \begin{pmatrix} \lambda_1(\eta) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\eta) \end{pmatrix}$. Alors on a que

$$\|\eta - A^{-1}XB^{-1}\| = \|A\eta B - AA^{-1}XB^{-1}B\| = \|A\eta B - X\| = \sqrt{2\delta^2} .$$

Ceci implique que

$$\mathrm{dist}(\eta, E) \leq \|\eta - A^{-1}XB^{-1}\| \to 0, \delta \to 0;$$

par ailleurs cette limite est uniforme par rapport à η. On a donc vérifié la deuxième condition.

3)si $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{intRco}\boldsymbol{E}$ alors $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{Rco}\boldsymbol{E_\delta}$ $\forall\, \boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$ suffisamment petit : Il suffit de montrer l'implication suivante, où $(x,y) = (\lambda_1(\eta), \lambda_2(\eta))$, grâce au théorème 4.2.5 :

$$xy + \theta(y-x) < \max_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a)\ \forall\, \theta \in [0, \max_{(a,b)\in K} b]$$
$$\Downarrow$$
$$xy + \theta(y-x) \leq \max_{(a,b)\in K} (a-\delta)(b-\delta) + \theta(b-a)\ \forall\, \theta \in [0, \max_{(a,b)\in K} b - \delta]\ :$$

pour ceci il suffit de montrer que

$$\lim_{\delta\to 0} \max_{(a,b)\in K} (a-\delta)(b-\delta) + \theta(b-a) = \max_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a)$$

uniformément par rapport à $\theta \in [0, \max_{(a,b)\in K} b]$. On a que

$$\begin{aligned}
&|\max_{(a,b)\in K} (a-\delta)(b-\delta) + \theta(b-a) - \max_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a)| \\
&\leq \max_{(a,b)\in K} |(a-\delta)(b-\delta) + \theta(b-a) - ab - \theta(b-a)| \\
&\leq \max_{(a,b)\in K} \delta(a+b+\delta) \to 0,\ \delta \to 0
\end{aligned}$$

uniformément par rapport à $\theta \in [0, \max_{(a,b)\in K} b]$. On a par conséquent prouvé la troisième condition de la propriété d'approximation. □

Le théorème d'existence 4.1.1 suit tout de suite du résultat précédent, grâce au théorème 3.4.2.

4.4 La méthode de l'intégration convexe de Gromov

Dans cette section nous allons démontrer le théorème d'existence suivant :

Théorème 4.4.1. *Soient* $E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K\}$ *et*

$$K = \bigcup_{i=1}^{n_0} (a_i, b_i), 0 < a_i < b_i, n_o \in \mathbb{N}\,. \tag{4.18}$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un ouvert borné. Soit* $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ *telle que* $D\varphi \in \operatorname{int}\operatorname{Rco}E$ *dans* Ω*. Alors il existe une application* $u \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ *solution de (4.1).*

Nous allons utiliser le théorème d'existence 3.5.2. Pour ceci nous allons utiliser l'enveloppe rang un convexe de l'ensemble E, selon la définition donnée par Šverák et Müller (on rappelle qu'on utilise la notation $\operatorname{Rco}^s E$). Il nous sera utile le théorème suivant :

Théorème 4.4.2. *Soit* $K \subset T$ *un ensemble compact qui satisfait (4.3). Soit*

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K\}\,.$$

Alors, si $m(\theta) = \max_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a)$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rco}^s E &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \theta(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) \le m(\theta) \,\forall\, \theta \in [0, \max_{(a,b)\in K} b]\right\}, \\
\operatorname{int}\operatorname{Rco}^s E &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) + \theta(\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) < m(\theta) \,\forall\, \theta \in [0, \max_{(a,b)\in K} b]\right\}.
\end{aligned}$$

Démonstration. On a prouvé dans la section précédente que $\operatorname{Pco} E = \operatorname{Rco} E$ et donc par définition de $\operatorname{Rco}^s E$ (voir chapitre 3)

$$\operatorname{Rco}^s E \subseteq \operatorname{Pco} E = \operatorname{Rco} E \subseteq \operatorname{Rco}^s E\,,$$

ce qui conclut la preuve grâce au théorème 4.2.5. □

4.4.1 Approximation par l'intérieur

Dans cette section nous allons démontrer que l'ensemble E, défini par (4.2) avec (4.18) admet une approximation par l'intérieur (voir définition 3.5.1). Ceci sera utile pour pouvoir établir le théorème d'existence à l'aide du théorème 3.5.2.

On va établir maintenant une proposition qui sera le point crucial de l'approximation par l'intérieur. On va construire des ensembles V_n fermés à partir desquels on définira, après, les ensembles U_n de l'approximation par l'intérieur.

Définition 4.4.3. *Soit* $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. *On définit les ensembles suivants :*

$$V_n = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K_n\}\,,$$

où

$$K_n = \bigcup_{(a,b)\in K} R^n_{(a,b)},\ R^n_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a + \varepsilon_n - r_n \le x \le a + \varepsilon_n, \\ \frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n} - r_n \le y \le \frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}\}$$

avec

$$r_n = \frac{1}{2}\min_{(a,b)\in K}\left\{\frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n} - a - \varepsilon_n, \varepsilon_n, a+\varepsilon_n, \frac{(a+\varepsilon_n)(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)}{ab-\varepsilon_n}\right\}.$$

On va démontrer la proposition suivante :

Proposition 4.4.4. *Soit E défini comme*

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K\},$$

avec

$$K = \bigcup_{i=1}^{n_0} (a_i, b_i),\ \text{avec } 0 < a_i < b_i,\ \ n_0 \in \mathbb{N}.$$

Alors les ensembles V_n définis ci-dessus satisfont
1) $V_n \subseteq \operatorname{int}\operatorname{Rco}^s(V_{n+1})$ *;*
2) $\sup_{X\in V_n} \operatorname{dist}(X,E) \to 0$ *si* $n \to +\infty$.

La preuve de la première condition sera la plus laborieuse. Pour cela on va utiliser les deux lemmes suivants.

Lemme 4.4.5. *Pour tout* $(a,b) \in K$ *on a*

$$\max_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} xy + \theta(y-x) < \max_{(x,y)\in R^{n+1}_{(a,b)}} xy + \theta(y-x), \ \forall\, \theta \in [0, \max_{(x,y)\in R^{n+1}_{(a,b)}} y]\,.$$

Démonstration. Pour $\theta \geq 0$ la fonction $f(x,y) = xy + \theta(y-x)$ est dérivable et $Df = (y-\theta, x+\theta)$ ne s'annule pas dans $R^n_{(a,b)}$, ce qui implique f atteint son maximum sur le bord de $R^n_{(a,b)}$. Alors il est facile de voir que

$$\max_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} xy + \theta(y-x) = \sup\{\alpha_n^{(a,b)}(\theta), \beta_n^{(a,b)}(\theta)\}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_n^{(a,b)}(\theta) &= (a+\varepsilon_n - r_n)\,\frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n} + \theta\left(\frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n} - a - \varepsilon_n + r_n\right) \\ \beta_n^{(a,b)}(\theta) &= ab - \varepsilon_n + \theta\left(\frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n} - a - \varepsilon_n\right)\,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

En n'écrivant pas la dépendance de α_n, β_n du point (a,b), on a que

$$\alpha_n(\theta) \leq \beta_n(\theta) \Leftrightarrow \theta \leq \max_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} y = \frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}\,.$$

Ceci implique que

$$\max\{\alpha_n(\theta), \beta_n(\theta)\} = \begin{cases} \beta_n(\theta), \theta \in [0, \max_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} y] \\ \alpha_n(\theta), \theta \geq \max_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} y\,. \end{cases}$$

Pour montrer l'énoncé du lemme on va prouver que

$$\beta_n(\theta) < \alpha_{n+1}(\theta), \ \forall\, \theta \in [0, \max_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} y], \tag{4.20}$$

et

$$\alpha_n(\theta) < \beta_{n+1}(\theta), \ \forall\, \theta \in [\max_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} y, \max_{(x,y)\in R^{n+1}_{(a,b)}} y]\,. \tag{4.21}$$

En fait (4.20) impliquera que pour tout $\theta \in [0, \max_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} y]$

$$\max_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} xy + \theta(y-x) = \beta_n(\theta) < \alpha_{n+1}(\theta) \leq \max_{(x,y)\in R^{n+1}_{(a,b)}} xy + \theta(y-x)\,.$$

Par ailleurs (4.21) impliquera que pour tout $\theta \in [\max_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} y, \max_{(x,y)\in R^{n+1}_{(a,b)}} y]$ on a

$$\max_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} xy + \theta(y-x) = \alpha_n(\theta) < \beta_{n+1}(\theta) \leq \max_{(x,y)\in R^{n+1}_{(a,b)}} xy + \theta(y-x)$$

c'est à dire le résultat.

Preuve de (4.20) Il faut montrer que

$$\begin{aligned}
&ab - \varepsilon_n + \theta \left(\frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} - a - \varepsilon_n \right) \\
&< (a + \varepsilon_{n+1} - r_{n+1}) \frac{ab - \varepsilon_{n+1}}{a + \varepsilon_{n+1}} + \theta \left(\frac{ab - \varepsilon_{n+1}}{a + \varepsilon_{n+1}} - a - \varepsilon_{n+1} + r_{n+1} \right).
\end{aligned}$$

Par la linéairité en θ il suffit de vérifier cette inégalité pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \max\limits_{(a,b)\in R^n_{(a,b)}} b$. Pour $\theta = 0$ on obtient

$$ab - \varepsilon_n < \frac{ab - \varepsilon_{n+1}}{a + \varepsilon_{n+1}} (a + \varepsilon_{n+1} - r_{n+1}) \ ,$$

ce qui implique la condition suivante sur r_n :

$$r_n \leq \frac{(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)(a + \varepsilon_n)}{ab - \varepsilon_n},$$

satisfaite par hypothèse.

Pour $\theta = \max\limits_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} y = \frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}$ on obtient

$$\left(\frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} \right)^2 < (a + \varepsilon_{n+1} - r_{n+1}) \left(\frac{ab - \varepsilon_{n+1}}{a + \varepsilon_{n+1}} - \frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} \right) + \frac{ab - \varepsilon_{n+1}}{a + \varepsilon_{n+1}} \frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} \ ,$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} \left(\frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} - \frac{ab - \varepsilon_{n+1}}{a + \varepsilon_{n+1}} \right) < (a + \varepsilon_{n+1} - r_{n+1}) \left(\frac{ab - \varepsilon_{n+1}}{a + \varepsilon_{n+1}} - \frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} \right) .$$

Comme

$$\frac{ab - \varepsilon_{n+1}}{a + \varepsilon_{n+1}} > \frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} \text{ et } a + \varepsilon_{n+1} - r_{n+1} \geq 0$$

alors on a (4.20).

Preuve de (4.21) Il faut montrer que

$$\begin{aligned}
&(a + \varepsilon_n - r_n) \frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} + \theta \left(\frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} - a - \varepsilon_n + r_n \right) \\
&< ab - \varepsilon_{n+1} + \theta \left(\frac{ab - \varepsilon_{n+1}}{a + \varepsilon_{n+1}} - a - \varepsilon_{n+1} \right) .
\end{aligned}$$

Par la linéairité il suffit de montrer cette inégalité pour $\theta = \max\limits_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} y = \frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}$ et pour $\theta = \max\limits_{(x,y)\in R^{n+1}_{(a,b)}} y = \frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}}$. Pour $\theta = \max\limits_{(a,b)\in R^n_{(a,b)}} b$ on obtient

$$\left(\frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} \right)^2 < (a + \varepsilon_{n+1}) \left(\frac{ab - \varepsilon_{n+1}}{a + \varepsilon_{n+1}} - \frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} \right) + \frac{ab - \varepsilon_{n+1}}{a + \varepsilon_{n+1}} \frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} .$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} \left(\frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} - \frac{ab - \varepsilon_{n+1}}{a + \varepsilon_{n+1}} \right) < (a + \varepsilon_{n+1}) \left(\frac{ab - \varepsilon_{n+1}}{a + \varepsilon_{n+1}} - \frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} \right) .$$

Comme

$$\frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}} > \frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}$$

alors on a le résultat.

Pour $\theta = \max_{(a,b)\in R^{n+1}_{(a,b)}} b$ on obtient

$$(a+\varepsilon_n - r_n)\left(\frac{ab+\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n} - \frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}}\right) + \frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}\frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}} < \left(\frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}}\right)^2,$$

ce qui est équivalent à

$$(a+\varepsilon_n - r_n)\left(\frac{ab+\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n} - \frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}}\right) < \frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}}\left(\frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}} - \frac{ab+\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}\right).$$

Comme

$$\frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}} > \frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n} \quad \text{et} \quad a+\varepsilon_n - r_n > 0$$

par le choix de r_n, alors on a (4.21). On a donc prouvé le résultat. □

Lemme 4.4.6. *Soit* $b_{n_0} = \max_{(a_i,b_i)\in K} b_i$*; supposons que* $b_{n_0} > b_i$ *pour tout* $i = 1..n_0-1$. *Alors*

$$\max_{(x,y)\in K_n} xy + \theta(y-x) < \max_{(x,y)\in K_{n+1}} xy + \theta(y-x).$$

Démonstration. Soit a_{n_0} tel que $(a_{n_0}, b_{n_0}) \in K$. On observe tout de suite que

$$\max_{(x,y)\in K_n} y = \frac{a_{n_0}b_{n_0} - \varepsilon_n}{a_{n_0}+\varepsilon_n} :$$

en fait il suffit de passer à la limite dans chaque coté de l'inégalité $\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_n}{a_{n_0}+\varepsilon_n} > \frac{a_ib_i-\varepsilon_n}{a_i+\varepsilon_n}$ pour obtenir $b_{n_0} \geq b_i$ pour tout $i \in \{1..n_0-1\}$; grâce au théorème de la permanence du signe, comme $b_{n_0} > b_i$ pour tout $i = 1..n_0-1$, alors

$$\max_{(x,y)\in K_n} y = \max_{(a,b)\in K} \frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n} = \frac{a_{n_0}b_{n_0} - \varepsilon_n}{a_{n_0}+\varepsilon_n}.$$

On va maintenant montrer l'inégalité de l'énoncé. Pour ceci il est utile d'observer que si (a,b) est un point quelconque de K tel que $b < b_{n_0}$, alors pour tout $\theta \in \left[\frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}}, \frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}\right]$

$$\max_{(x,y)\in R^n_{(a_{n_0},b_{n_0})}} xy + \theta(y-x) \geq \max_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} xy + \theta(y-x).$$

Voyons pourquoi. Comme on a vu dans le lemme précédent dans cet intervalle on a

$$\max_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} xy + \theta(y-x) = \alpha_n^{(a,b)}(\theta).$$

On va maintenant prouver que pour tout $\theta \in \left[\frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}}, \frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}\right]$ on a que

$$\alpha_n^{(a,b)}(\theta) \leq \alpha_n^{(a_{n_0},b_{n_0})}(\theta) :$$

ceci impliquera que si $\theta \in \left[\frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}}, \frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}\right]$ alors

$$\max_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} xy+\theta(y-x) = \alpha_n^{(a,b)}(\theta) \leq \alpha_n^{(a_{n_0},b_{n_0})}(\theta) \leq \max_{(x,y)\in R^n_{(a_{n_0},b_{n_0})}} xy+\theta(y-x)\,.$$

Il faut alors prouver que

$$\begin{aligned}&(a+\varepsilon_n-r_n)\left(\frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}-\theta\right)+\theta\frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}\\ &\leq (a_{n_0}+\varepsilon_n-r_n)\left(\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_n}{a_{n_0}+\varepsilon_n}-\theta\right)+\theta\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_n}{a_{n_0}+\varepsilon_n}\end{aligned}$$

Par la linéairité, il suffit de montrer cette inégalité pour $\theta = \frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}}$ et pour $\theta = \frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}$. Si on remplace $\theta = \frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}}$ et on passe à la limite pour $n \to \infty$ on a

$$b^2 \leq a_{n_0}(b_{n_0}-b)+bb_{n_0} \Longleftrightarrow a_{n_0}(b_{n_0}-b) \geq b(b-b_{n_0})\,.$$

Comme cette relation est vérifiée avec l'inégalité stricte, par le théorème de la permanence du signe on a le résultat. Si on remplace $\theta = \frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}$ et on passe à la limite pour $n \to \infty$ on a

$$a(b-b_{n_0})+b_{n_0}b \leq b_{n_0}^2 \Longleftrightarrow b_{n_0}(b_{n_0}-b) \geq a(b-b_{n_0})\,.$$

Comme cette relation est vérifiée avec l'inégalité stricte, par le théorème de la permanence du signe on a le résultat.

Grâce à cette remarque on a que si $b < b_{n_0}$ et si $\theta \in \left[\frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}}, \frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}\right]$ alors

$$\begin{aligned}\max_{(x,y)\in K_n} xy+\theta(y-x) &= \max_{(x,y)\in R^n_{(a_{n_0},b_{n_0})}} xy+\theta(y-x)\\ &< \max_{(x,y)\in R^{n+1}_{(a_{n_0},b_{n_0})}} xy+\theta(y-x)\\ &\leq \max_{(x,y)\in K_{n+1}} xy+\theta(y-x)\,,\end{aligned}$$

où on a utilisé le lemme précédent pour écrire la première inégalité. On sait donc montrer l'énoncé du lemme si $\theta \in \left[\frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}}, \frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}\right]$, si (a,b) est un point quelconque de K avec $b < b_{n_0}$. En particulier on a montré ceci pour le point (a_m, b_m), où $b_m = \min\limits_{(a,b)\in K} b$ et $a_m = \min\limits_{(a,b_m)\in K} a$. Cette considération sera utile dans la suite. En fait, soit $b_m = \min\limits_{(a,b)\in K} b$; soit $a_m = \min\limits_{(a,b_m)\in K} a$. Alors

$$\frac{a_mb_m-\varepsilon_{n+1}}{a_m+\varepsilon_{n+1}} \leq \frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}} \ \ \forall n\,.$$

En fait, si $b \neq b_m$, il suffit de passer à la limite pour obtenir $b_m \leq b$, ce qui est vérifié avec l'inégalité stricte ; le théorème de la permanence du signe implique l'inégalité cherchée. Si $b = b_m$, alors

$$\frac{a_mb_m-\varepsilon_{n+1}}{a_m+\varepsilon_{n+1}} \leq \frac{ab_m-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}}$$

est équivalent à $a_m(b_m+1) \leq a(b_m+1)$, ce qui est vérifié par définition de a_m.

Or, soit $\theta \in \left[0, \frac{a_m b_m - \varepsilon_{n+1}}{a_m + \varepsilon_{n+1}}\right]$, c'est à dire l'intervalle qui nous reste à analyser par l'étude précédente (faite pour tout $\theta \in \left[\frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}}, \frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}\right]$), pour tout $(a,b) \in K$ fixé. Sûrement il existe $(a,b) \in K$ tel que

$$\max_{(x,y)\in K_n} xy + \theta(y-x) = \max_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} xy + \theta(y-x)$$

comme le sup est atteint. Alors, comme $\theta \leq \frac{a_m b_m - \varepsilon_{n+1}}{a_m + \varepsilon_{n+1}} \leq \frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}}$

$$\begin{aligned}\max_{(x,y)\in K_n} xy + \theta(y-x) &= \max_{(x,y)\in R^n_{(a,b)}} xy + \theta(y-x) \\ &< \max_{(x,y)\in R^{n+1}_{(a,b)}} xy + \theta(y-x) \\ &\leq \max_{(x,y)\in K_{n+1}} xy + \theta(y-x)\,,\end{aligned}$$

où on a utilisé le lemme précédent pour écrire la première inégalité. □

On peut maintenant démontrer la proposition 4.4.4.

Démonstration. On va diviser la démonstration en deux étapes dans lesquelles on va étudier les deux conditions de l'énoncé respectivement.
1) *Étude de la condition 1) :* Il faut montrer que $V_n \subset \text{int } \mathrm{Rco}^s V_{n+1}$, c'est à dire

$$\max_{(x,y)\in K_n} xy + \theta(y-x) < \max_{(x,y)\in K_{n+1}} xy + \theta(y-x). \tag{4.22}$$

On va prouver qu'on peut se réduire au cas où les points de K satisfont les hypothèses du lemme précédent. Avant de commencer on observe que si $b_{n_0} = \max_{(a,b)\in K} b$ et si $a_{n_0} = \max_{(a,b_{n_0})\in K} a$ alors

$$\max_{(x,y)\in K_n} y = \frac{a_{n_0}b_{n_0} - \varepsilon_n}{a_{n_0} + \varepsilon_n}\,.$$

En fait si (a, b_{n_0}) est un point dans K avec $a < a_{n_0}$, alors

$$\frac{ab_{n_0} - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} < \frac{a_{n_0}b_{n_0} - \varepsilon_n}{a_{n_0} + \varepsilon_n}\,;$$

par ailleurs on a déjà vérifié dans le lemme précédent que

$$\frac{a_{n_0}b_{n_0} - \varepsilon_n}{a_{n_0} + \varepsilon_n} > \frac{\bar{a}\bar{b} - \varepsilon_n}{\bar{a} + \varepsilon_n}\ \forall\ (\bar{a}, \bar{b}) \in K : \bar{b} < b_{n_0},$$

ce qui implique que

$$\max_{(x,y)\in K_n} y = \frac{a_{n_0}b_{n_0} - \varepsilon_n}{a_{n_0} + \varepsilon_n}\,.$$

On va maintenant prouver que si $\tilde{K}_n = \bigcup_{\substack{(a,b)\in K\setminus \\ \{(a,b_{n_0}),a<a_{n_0}\}}} R^n_{(a,b)}$ alors

$$\max_{(x,y)\in \tilde{K}_n} xy + \theta(y-x) = \max_{(x,y)\in K_n} xy + \theta(y-x). \tag{4.23}$$

Ceci sera suffisant pour montrer la condition 1 : en fait il nous permettra de considérer seulement les points de $\tilde{K}_n$, c'est à dire les points qui vérifient les hypothèses du lemme précédent, dans lequel on a déjà prouvé l'inégalité (4.22). On va montrer que si $a < a_{n_0}$ alors pour tout $\theta \in \left[0, \frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}\right]$

$$\max_{(x,y)\in R^n_{(a,b_{n_0})}} xy+\theta(y-x) \leq \max_{(x,y)\in R^n_{(a_{n_0},b_{n_0})}} xy+\theta(y-x)\,. \tag{4.24}$$

Ceci implique que le $\max_{(x,y)\in K_n} xy+\theta(y-x)$ n'est jamais atteint dans $R^n_{(a,b_{n_0})}$: par conséquent on peut ne pas considérer ces points pour montrer (4.22).

Plus précisément on prouvera, selon les notations du lemme 4.4.5 que

$$\beta_n^{(a,b_{n_0})}(\theta) \leq \beta_n^{(a_{n_0},b_{n_0})}(\theta)\,, \tag{4.25}$$

et

$$\alpha_n^{(a,b_{n_0})}(\theta) \leq \alpha_n^{(a_{n_0},b_{n_0})}(\theta)\,. \tag{4.26}$$

Ceci impliquera que

$$\begin{aligned}
\beta_n^{(a,b_{n_0})}(\theta) \leq \beta_n^{(a_{n_0},b_{n_0})}(\theta) &\leq \max_{(x,y)\in R^n_{(a_{n_0},b_{n_0})}} xy+\theta(y-x)\\
\alpha_n^{(a,b_{n_0})}(\theta) \leq \alpha_n^{(a_{n_0},b_{n_0})}(\theta) &\leq \max_{(x,y)\in R^n_{(a_{n_0},b_{n_0})}} xy+\theta(y-x)
\end{aligned}$$

et donc (4.24).

Preuve de (4.25). Il faut montrer que pour tout $\theta \in \left[0, \frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}\right]$

$$\begin{aligned}
&(a+\varepsilon_n)\left(\frac{ab_{n_0}-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}-\theta\right)+\theta\frac{ab_{n_0}-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}\\
&\leq (a_{n_0}+\varepsilon_n)\left(\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_n}{a_{n_0}+\varepsilon_n}-\theta\right)+\theta\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_n}{a_{n_0}+\varepsilon_n}\,.
\end{aligned}$$

Par linéairité il suffit de prouver cette relation pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}$. Si on remplace $\theta = 0$ et on passe à la limite on obtient

$$ab_{n_0} \leq a_{n_0}b_{n_0} :$$

comme ceci est une relation vraie avec l'inégalité stricte, le théorème de la permanence du signe implique le résultat.

Pour $\theta = \frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}$ on obtient

$$\begin{aligned}
&(a+\varepsilon_n)\left(\frac{ab_{n_0}-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}-\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}\right)+\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}\frac{ab_{n_0}-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}\\
&\leq (a_{n_0}+\varepsilon_n)\left(\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_n}{a_{n_0}+\varepsilon_n}-\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}\right)+\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_n}{a_{n_0}+\varepsilon_n}
\end{aligned}$$

ce qui est vrai, parce que $a < a_{n_0}$,

$$\frac{ab_{n_0}-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}-\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}} < \frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_n}{a_{n_0}+\varepsilon_n}-\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}\,,$$

et

$$\frac{ab_{n_0}-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n} < \frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_n}{a_{n_0}+\varepsilon_n}\,.$$

On a donc prouvé (4.25).

Preuve de (4.26). Il faut prouver que

$$\begin{aligned}&(a+\varepsilon_n-r_n)\left(\frac{ab_{n_0}-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}-\theta\right)+\theta\frac{ab_{n_0}-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}\\ &\leq (a_{n_0}+\varepsilon_n-r_n)\left(\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_n}{a_{n_0}+\varepsilon_n}-\theta\right)+\theta\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_n}{a_{n_0}+\varepsilon_n}\,.\end{aligned}$$

Par linéairité il suffit de prouver cette relation pour $\theta=0$ et pour $\theta=\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}$. Si on remplace $\theta=0$ et on passe à la limite on obtient

$$ab_{n_0}\leq a_{n_0}b_{n_0}\,:$$

comme ceci est une relation vraie avec l'inégalité stricte par le théorème de la permanence du signe on a le résultat. Pour $\theta=\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}$ on obtient

$$\begin{aligned}&(a+\varepsilon_n-r_n)\left(\frac{ab_{n_0}-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}-\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}\right)+\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}\frac{ab_{n_0}-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}\\ &\leq (a_{n_0}+\varepsilon_n-r_n)\left(\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_n}{a_{n_0}+\varepsilon_n}-\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}\right)+\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}}\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_n}{a_{n_0}+\varepsilon_n}\end{aligned}$$

ce qui est vrai, parce que $a<a_{n_0}$,

$$\frac{ab_{n_0}-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}-\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}} < \frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_n}{a_{n_0}+\varepsilon_n}-\frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_{n+1}}{a_{n_0}+\varepsilon_{n+1}},$$

et

$$\frac{ab_{n_0}-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n} < \frac{a_{n_0}b_{n_0}-\varepsilon_n}{a_{n_0}+\varepsilon_n}\,.$$

On a donc prouvé (4.23) et par conséquent, grâce au lemme précédent, la première condition de la proposition.

2)*Étude de la condition 2) :*

Soit $\xi\in V_n$; alors il existe $(a,b)\in K$ tel que $(\lambda_1(\xi),\lambda_2(\xi))\in R^n_{(a,b)}$. Sûrement

$$(a_n,b_n)=(a-\lambda_1(\xi),a-\lambda_2(\xi))\to 0,\ n\to\infty,$$

uniformément par rapport à ξ. En fait, comme $r_n<\varepsilon_n$, alors $a+\varepsilon_n-r_n>a$; par conséquent, puisque $a-\varepsilon_n-r_n\leq\lambda_1(\xi)\leq a-\varepsilon_n$ alors

$$|a_n|\leq|a-(a+\varepsilon_n)|\to 0,\ n\to\infty$$

indépendamment de ξ. Pour b_n on a, comme $\frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}-r_n\leq\lambda_2(\xi)\leq\frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}$,

$$|b_n|\leq\left|b-\frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n}+r_n\right|\to 0$$

indépendamment de ξ, comme K est compact. Or, on définit

$$X=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\in E\,.$$

Soient $A, B \in \mathcal{O}(2)$ telles que $A\xi B = \begin{pmatrix} \lambda_1(\xi) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\xi) \end{pmatrix}$. Alors on a que

$$\|\xi - A^{-1}XB^{-1}\| = \|A\xi B - AA^{-1}XB^{-1}B\| = \|A\xi B - X\| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,.$$

Ceci implique que

$$\mathrm{dist}(\xi, E) \leq \|\xi - A^{-1}XB^{-1}\| \to 0$$

uniformément par rapport à ξ. On a donc vérifié la deuxième condition. $\square$

Théorème d'existence d'une approximation par l'intérieur

On va maintenant montrer le théorème d'existence d'une approximation par l'intérieur pour E.

Théorème 4.4.7. *Soit E défini par (4.2) avec (4.18). Alors E admet une approximation par l'intérieur.*

Démonstration. On va diviser la démonstration en trois étapes : dans la première on va définir les ensembles U_n à l'aide des ensembles V_n que nous avons définis dans la section précédente. Dans les autres étapes on va vérifier les deux conditions de l'approximation par l'intérieur respectivement.
Étape 1) Soient V_n les ensembles définis dans la section précédente. On pose

$$U_n = \mathrm{int}(V_n)\,.$$

Avant de démontrer l'approximation par l'intérieur on observe banalement que U_n est ouvert. Par ailleurs, $\overline{U_n} = V_n$, c'est à dire

$$V_n = \overline{\mathrm{int} V_n}.$$

En fait sûrement int $V_n \subseteq V_n$ et donc $\overline{\mathrm{int} V_n} \subseteq V_n$. On va maintenant prouver l'inclusion inverse. Soit $\xi \in V_n$. Alors $(\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K_n$. Ceci implique que $(\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in \mathrm{int} K_n$ ou $(\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in \partial K_n$. Dans le premier cas, grâce à la continuité de la fonction $\eta \to (\lambda_1(\eta), \lambda_2(\eta))$ on a que $\xi \in \mathrm{int} V_n$. Dans le deuxième cas il existe une suite $(x_m, y_m) \in \mathrm{int} K_n$ telle que $(x_m, y_m) \to (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi))$ si $m \to \infty$. Or, soient $S, T \in \mathcal{O}(2)$ telles que

$$S\xi T = \begin{pmatrix} \lambda_1(\xi) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\xi) \end{pmatrix}.$$

Alors on peut dire que $S^{-1} \begin{pmatrix} x_m & 0 \\ 0 & y_m \end{pmatrix} T^{-1} \to \xi$; par ailleurs

$$S^{-1} \begin{pmatrix} x_m & 0 \\ 0 & y_m \end{pmatrix} T^{-1} \in \mathrm{int} V_n,$$

parce que $\begin{pmatrix} x_m & 0 \\ 0 & y_m \end{pmatrix} \in \mathrm{int}\, V_n$ qui est isotrope (c.f.. Appendice) ; ceci implique que $\xi \in \overline{\mathrm{int} V_n}$ et donc

$$V_n \subseteq \overline{\mathrm{int} V_n}\,.$$

On va maintenant démontrer la première condition de l'approximation par l'intérieur.

Étape 2) Pour ce qui concerne la première condition de l'approximation par l'intérieur on a, grâce à la proposition 4.4.4,

$$U_n \subset V_n \subseteq \text{int Rco}^s\, V_{n+1} = \text{int Rco}^s(\overline{U_{n+1}});$$

On va maintenant vérifier que

$$\text{int Rco}^s V_{n+1} = \text{int Rco}^s \overline{U_{n+1}} \subseteq \text{Rco}^s\, U_{n+1}\ : \tag{4.27}$$

ceci impliquera que

$$U_n \subset \text{Rco}^s\, U_{n+1}\,,$$

c'est à dire la première condition de l'approximation par l'intérieur sera satisfaite.

Or, soit $\xi \in \text{int}\,\text{Rco}^s\, V_{n+1}$. On rappelle que

$$V_{n+1} = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi) \in K_{n+1}\}\,.$$

On montrera

$$\xi \in \text{Rco}^s \tilde{V}_{n+1}\,,$$

où $\tilde{V}_{n+1}$ est un ensemble défini par

$$\tilde{V}_{n+1} = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in \tilde{K}_{n+1}\}\,,$$

à partir d'un certain compact $\tilde{K}_{n+1} \subset \text{int}K_{n+1}$. Ceci implique que $\tilde{V}_{n+1} \subseteq \text{int}V_{n+1}$, par la continuité de la fonction $\xi \to (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi))$. Par conséquent, grâce à la définition de $\text{Rco}^s(\text{int}V_{n+1})$

$$\xi \in \text{Rco}^s \tilde{V}_{n+1} \subseteq \bigcup_{\substack{C\subset \text{int}\, V_{n+1} \\ C\ cpt}} \text{Rco}^s C = \text{Rco}^s(\text{int}V_{n+1}) = \text{Rco}^s(U_{n+1})\,.$$

On pose par simplicité $(\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) = (x, y)$. Comme $\xi \in \text{int}\,\text{Rco}^s\, V_{n+1}$, on a que pour tout $\theta \in [0, \max\limits_{(a,b)\in K_{n+1}} b]$

$$xy + \theta(y - x) < \max_{(a,b)\in K_{n+1}} ab + \theta(b - a)\,.$$

Il faut chercher un compact $\tilde{K}_{n+1} \subset \text{int}K_{n+1}$ tel que pour tout $\theta \in [0, \max\limits_{(a,b)\in \tilde{K}_{n+1}} b]$ on ait

$$xy + \theta(y - x) \leq \max_{(a,b)\in \tilde{K}_{n+1}} ab + \theta(b - a)\,.$$

On définit pour $\lambda > 0$, $\tilde{K}^\lambda_{n+1} = \bigcup\limits_{(a,b)\in K} d_\lambda(R^{n+1}_{(a,b)})$ où

$$d_\lambda(R^{(a,b)}_{n+1}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a + \varepsilon_n - r_n + \lambda \leq x \leq a + \varepsilon_n - \lambda,\ \frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} - r_n + \lambda \leq y \leq \frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} - \lambda\}\,.$$

On a que $\tilde{K}^\lambda_{n+1} \subset \text{int}\, K_{n+1}$ parce que $d_\lambda(R^{(a,b)}_{n+1}) \subset \text{int}\, R^{(a,b)}_{n+1}$, et $R^{(a,b)}_{n+1}$ ont intersection vide définitivement, comme K est composé par un nombre fini de points. Par ailleurs

$$\max_{(x,y)\in \tilde{K}^\lambda_{n+1}} xy + \theta(y - x) = \sup_{(a,b)\in K} \sup\{\alpha^{(a,b)}_{n,\lambda}(\theta), \beta^{(a,b)}_{n,\lambda}(\theta)\}$$

où

$$\alpha^{(a,b)}_{n+1,\lambda}(\theta) = (a+\varepsilon_{n+1} - r_{n+1} + \lambda)\left(\frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}} - \lambda\right)$$
$$+\theta\left(\frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}} - a - \varepsilon_{n+1} + r_{n+1} - 2\lambda\right);$$
$$\beta^{(a,b)}_{n+1,\lambda}(\theta) = (a+\varepsilon_{n+1} - \lambda)\left(\frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}} - \lambda\right) + \theta\left(\frac{ab-\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}} - a - \varepsilon_{n+1}\right).$$

Or, pour montrer le résultat il suffit de montrer que pour $\lambda \to 0$

$$\max_{(a,b)\in \tilde{K}^{\lambda}_{n+1}} ab + \theta(b-a) \to \max_{(a,b)\in K_{n+1}} ab + \theta(b-a)$$

uniformément par rapport à θ. Pour ceci on montrera que

$$\alpha^{(a,b)}_{n+1,\lambda}(\theta) \to \alpha^{(a,b)}_{n+1}(\theta), \quad \beta^{(a,b)}_{n+1,\lambda}(\theta) \to \beta^{(a,b)}_{n+1}(\theta)$$

uniformément par rapport à θ. On a que

$$|\alpha^{(a,b)}_{n+1,\lambda}(\theta) - \alpha^{(a,b)}_{n+1}(\theta)| = \left| -\lambda(a+\varepsilon_n - r_{n+1}) + \lambda\frac{ab+\varepsilon_{n+1}}{a+\varepsilon_{n+1}} - \lambda^2 - 2\theta\lambda \right| \le \lambda C \to 0$$

uniformément par rapport à θ. On peut faire le même raisonnement et montrer que $\beta^{(a,b)}_{n+1,\lambda}(\theta) \to \beta^{(a,b)}_{n+1}(\theta)$ uniformément par rapport à θ.
Étape 3) Pour la deuxième condition on a

$$0 \le \sup_{X\in U_n} \operatorname{dist}(X,E) \le \sup_{X\in \overline{U_n}} \operatorname{dist}(X,E) = \sup_{X\in V_n} \operatorname{dist}(X,E).$$

Par la proposition 4.4.4, $\sup_{X\in V_n} \operatorname{dist}(X,E) \to 0$, si $n \to 0$. Par conséquent

$$\sup_{X\in U_n} \operatorname{dist}(X,E) \to 0,\ n\to\infty$$

et donc aussi la deuxième condition de l'approximation par l'intérieur est satisfaite. □

4.4.2 Théorème d'existence

Ce que nous allons faire dans cette section est montrer le théorème 4.4.1 à l'aide du théorème 3.5.2.

Avant de montrer le théorème 4.4.1 pour une fonction φ quelconque, nous allons le montrer dans le cas où φ est une fonction affine.

Théorème 4.4.8. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Soit E l'ensemble défini par (4.2) avec (4.18). Soit $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telle que $\xi \in \operatorname{int} \operatorname{Rco}^s E$. Soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ une application telle que $D\varphi = \xi$ dans Ω. Alors il existe une application $u \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ solution de (4.1).*

Pour prouver ce théorème d'existence il nous sera utile la proposition suivante.

Proposition 4.4.9. *Soit E l'ensemble défini par (4.2) avec (4.18). Soit $\xi \in \operatorname{int} \mathrm{Rco}^s E$. Alors il existe une suite U_n approximation par l'intérieur pour E telle que $\xi \in U_1$.*

Dans la démonstration on va utiliser le lemme suivant.

Lemme 4.4.10. *Soit E l'ensemble défini par (4.2) avec (4.18). Soit $\xi \in \operatorname{int} \mathrm{Rco}^s E$. Soit V_n la suite d'ensembles définie dans la section précédente. Alors il existe $N = N(\xi) \in \mathbb{N}$ tel que $\xi \in \operatorname{int} \mathrm{Rco}^s V_N$.*

Démonstration. On pose $(\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) = (x, y)$. Il faut montrer que si

$$xy + \theta(y - x) < \max_{(a,b)\in K} ab + \theta(b - a) \ \forall\ \theta \in [0, \max_{(x,y)\in K} y]$$

alors il existe $N = N(x, y)$ tel que, si K_n est la suite d'ensemble définie dans 4.4.3

$$xy + \theta(y - x) < \max_{(a,b)\in K_N} ab + \theta(b - a) \ \forall\ \theta \in [0, \max_{(a,b)\in K_N} b]\,. \tag{4.28}$$

Pour ceci il suffit de prouver, comme $\max_{(a,b)\in K_n} b < \max_{(a,b)\in K} b$, par construction des K_n que

$$\max_{(a,b)\in K_n} ab + \theta(b - a) \to \max_{(a,b)\in K} ab + \theta(b - a) \tag{4.29}$$

uniformément par rapport à $\theta \in [0, \max_{(x,y)\in K} y]$. On a vu que

$$\max_{(a,b)\in K_n} ab + \theta(b - a) = \sup_{(a,b)\in K} \sup\{\alpha_n^{(a,b)}(\theta), \beta_n^{(a,b)}(\theta)\}\,.$$

où

$$\begin{aligned}
\alpha_n^{(a,b)}(\theta) &= (a + \varepsilon_n - r_n)\,\frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} + \theta\left(\frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} - a - \varepsilon_n + r_n\right) \\
\beta_n^{(a,b)}(\theta) &= ab - \varepsilon_n + \theta\left(\frac{ab - \varepsilon_n}{a + \varepsilon_n} - a - \varepsilon_n\right)\,.
\end{aligned}$$

On observe que

$$\begin{aligned}
&|\sup_{(a,b)\in K} \sup\{\alpha_n^{(a,b)}(\theta), \beta_n^{(a,b)}(\theta)\} - \max_{(a,b)\in K} ab + \theta(b - a)| \\
&\leq \sup_{(a,b)\in K} |\sup\{\alpha_n^{(a,b)}(\theta), \beta_n^{(a,b)}(\theta)\} - ab - \theta(b - a)|\,.
\end{aligned}$$

Comme K est composé par un nombre fini d'éléments, il suffit de montrer que pour tout $(a, b) \in K$ fixé on a

$$|\sup\{\alpha_n^{(a,b)}(\theta), \beta_n^{(a,b)}(\theta)\} - ab - \theta(b - a)| \to 0 \tag{4.30}$$

uniformément par rapport à θ. Pour montrer (4.30) on montrera que

$$\begin{aligned}
&|\alpha_n^{(a,b)}(\theta) - ab - \theta(b - a)| \to 0 \\
&|\beta_n^{(a,b)}(\theta) - ab - \theta(b - a)| \to 0
\end{aligned}$$

uniformément par rapport à θ. On commence par la première limite. Si on pose

$$\begin{aligned} m_n &= \frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n} - a - \varepsilon_n + r_n \\ q_n &= (a+\varepsilon_n - r_n)\,\frac{ab-\varepsilon_n}{a+\varepsilon_n} \end{aligned}$$

on a que $\alpha_n(\theta) = m_n\theta + q_n$. On remarque que $q_n \to ab$ et $m_n \to b-a$. Ceci est suffisant pour montrer le résultat. En fait, comme $\max\limits_{(x,y)\in K_n} y \leq \max\limits_{(x,y)\in K} y$, on a

$$\begin{aligned} |\alpha_n^{(a,b)}(\theta) - ab - \theta(b-a)| &\leq |m_n - b + a||\theta| + |q_n - ab| \\ &\leq |m_n - b + a|[\max_{(x,y)\in K} y] + |q_n - ab| \to 0\,. \end{aligned}$$

On a donc prouvé le résultat. Avec la même méthode on peut montrer la deuxième limite. □

Lemme 4.4.11. *Soit* $\mathbb{U}$ *un ensemble isotrope ouvert et borné contenu dans* $\mathbb{R}^{2\times 2}$*. Alors*

i) $\mathrm{Rco}^s\,\mathbb{U} = \bigcup\limits_{\substack{V\subset\mathbb{U}\\ V\ cpt,iso}} \mathrm{Rco}^s\,V\,;$

ii) $\mathrm{Pco}\,\mathbb{U} = \bigcup\limits_{\substack{V\subset\mathbb{U}\\ V\ cpt,iso}} \mathrm{Pco}\,V\,.$

Démonstration. i) On va montrer que $\mathrm{Rco}^s\,\mathbb{U} = \bigcup\limits_{\substack{V\subset\mathbb{U}\\ V\ cpt,iso}} \mathrm{Rco}^s\,V$. En utilisant la définition 3.2.7, il faut montrer que

$$\bigcup_{\substack{V\subset\mathbb{U}\\ V\ cpt}} \mathrm{Rco}^s\,V = \bigcup_{\substack{V\subset\mathbb{U}\\ V\ cpt,iso}} \mathrm{Rco}^s\,V$$

ce qui sera montré par double inclusion. On voit tout de suite que

$$\bigcup_{\substack{V\subset\mathbb{U}\\ V\ cpt}} \mathrm{Rco}^s\,V \supseteq \bigcup_{\substack{V\subset\mathbb{U}\\ V\ cpt,iso}} \mathrm{Rco}^s\,V$$

parce que la famille d'ensembles compacts $V \subset \mathbb{U}$ est plus large que la famille d'ensembles compacts isotropes $V \subset \mathbb{U}$.

On va étudier maintenant l'inclusion inverse, c'est à dire

$$\bigcup_{\substack{V\subset\mathbb{U}\\ V\ cpt}} \mathrm{Rco}^s\,V \subseteq \bigcup_{\substack{V\subset\mathbb{U}\\ V\ cpt,iso}} \mathrm{Rco}^s\,V\,. \tag{4.31}$$

Pour ceci il nous sera utile la remarque suivante. Soit $V \subset \mathbb{U}$, V compact ; on observe que $\bigcup\limits_{R,S\in\mathcal{O}(2)} RVS$ est un ensemble isotrope borné contenu dans $\mathbb{U}$. Par ailleurs on voit facilement qu'il est fermé. Cette remarque est utile pour montrer (4.31) : en fait

$$\bigcup_{\substack{V\subset\mathbb{U}\\ V\ cpt}} \mathrm{Rco}^s V \subseteq \bigcup_{\substack{V\subset\mathbb{U}\\ V\ cpt}} \mathrm{Rco}^s\left(\bigcup_{R,S\in\mathcal{O}(2)} SVT\right) \subseteq \bigcup_{\substack{W\subset\mathbb{U}\\ W\ cpt,iso}} \mathrm{Rco}^s W\,.$$

ii) On va montrer l'égalité

$$\operatorname{Pco}\mathbb{U} = \bigcup_{\substack{V\subset\mathbb{U}\\ V\ cpt,iso}} \operatorname{Pco} V\,.$$

En utilisant la proposition 3.2.5 il faut montrer que

$$\bigcup_{\substack{V\subset\mathbb{U}\\ V\ cpt}} \operatorname{Pco} V = \bigcup_{\substack{V\subset\mathbb{U}\\ V\ cpt,iso}} \operatorname{Pco} V\,.$$

Pour ceci il suffit de suivre le même raisonnement qu'on a fait pour démontrer l'égalité 1). □

Corollaire 4.4.12. *Soit* $\mathbb{U}$ *un ensemble isotrope ouvert et borné contenu dans* $\mathbb{R}^{2\times 2}$. *Alors* $\operatorname{Rco}\mathbb{U} = \operatorname{Rco}^s\mathbb{U} = \operatorname{Pco}\mathbb{U}$.

Démonstration. On montrera que $\operatorname{Rco}^s\mathbb{U} = \operatorname{Pco}\mathbb{U}$ et après $\operatorname{Rco}\mathbb{U} = \operatorname{Pco}\mathbb{U}$. Grâce au lemme précédent on a

$$\operatorname{Rco}^s\mathbb{U} = \bigcup_{\substack{V\subset\mathbb{U}\\ V\ cpt,iso}} \operatorname{Rco}^s V\,.$$

Par le théorème 4.4.2 on peut écrire que $\operatorname{Rco}^s V = \operatorname{Pco} V$ et donc

$$\operatorname{Rco}^s\mathbb{U} = \bigcup_{\substack{V\subset\mathbb{U}\\ V\ cpt,iso}} \operatorname{Pco} V = \operatorname{Pco}\mathbb{U}.$$

Or, pour prouver l'identité $\operatorname{Rco}\mathbb{U} = \operatorname{Pco}\mathbb{U}$ il suffit de prouver que $\operatorname{Pco}\mathbb{U} \subseteq \operatorname{Rco}\mathbb{U}$. Si $\xi \in \operatorname{Pco}\mathbb{U}$, alors par la proposition 3.2.5 il existe $V \subset \mathbb{U}$ compact et isotrope tel que $\xi \in \operatorname{Pco} V$. Par la proposition 4.2.10 $\xi \in \operatorname{Rco} V \subset \operatorname{Pco}\mathbb{U}$. □

On peut maintenant démontrer la proposition 4.4.9.

Démonstration. Soit $\{U_n\}$ la suite d'ensembles définis dans la section précédente. Tout d'abord on observe que pour tout $N \in \mathbb{N}$ fixé la suite

$$\operatorname{Rco}^s U_N, U_{N+1}, \ldots$$

est une approximation par l'intérieur pour E. En fait par définition d'approximation par l'intérieur $U_N \subset \operatorname{Rco}^s U_{N+1}$. Si on passe à l'enveloppe rang un convexe on obtient $\operatorname{Rco}^s U_N \subset \operatorname{Rco}^s \operatorname{Rco}^s U_{N+1} = \operatorname{Rco}\operatorname{Rco}^s U_{N+1}$ (la dernière égalité suit du fait que $\operatorname{Rco}^s U_{N+1}$ est ouvert et du corollaire précédent) ; puisque $\operatorname{Rco}^s U_{N+1}$ est un ensemble rang un convexe, alors $\operatorname{Rco}\operatorname{Rco}^s U_{N+1} = \operatorname{Rco}^s U_{N+1}$. Les autres ensembles à partir de U_{N+1} vérifient la première condition de l'approximation par l'intérieur, pour ce qu'on a montré dans la section précédente. Alors

$$\operatorname{Rco}^s U_N, U_{N+1}, \ldots$$

vérifie la première condition de l'approximation par l'intérieur. La deuxième condition est sûrement satisfaite.

Or, soit $\xi \in \operatorname{int}\operatorname{Rco}^s E$. Alors, grâce au lemme 4.4.10, il existe $N = N(\xi) \in \mathbb{N}$ tel que $\xi \in \operatorname{int}\operatorname{Rco}^s V_N$. Pour ce qu'on a montré dans l'étape 2 du théorème

4.4.7 (voir inclusion (4.27)) $\xi \in \operatorname{Rco}^s U_N$. Ceci implique que ξ appartient au premier ensemble de la suite

$$\operatorname{Rco}^s(U_N), U_{N+1}, ...$$

qui est une approximation par l'intérieur pour E. $\square$

La proposition précédente nous permet alors d'établir le théorème d'existence 4.4.8 à l'aide du théorème 3.5.2.

On peut démontrer aussi le théorème d'existence 4.4.1, comme corollaire du théorème précédent. On utilisera le théorème suivant établi par Dacorogna-Marcellini dans [12] (corollaire 10.11).

Théorème 4.4.13. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et A un ouvert de $\mathbb{R}^{m\times n}$. Soit $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \cap W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ avec*

$$D\varphi(x) \in A, \forall\ x \in \Omega.$$

Alors il existe une fonction $v \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ telle que
1) v est affine par morceaux sur Ω;
2) $v = \varphi$ sur $\partial\Omega$;
3) $Dv \in A$ p.p. dans Ω.

Démonstration. Soit $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$. On définit l'ouvert A comme

$$A = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) < \sigma(\lambda_1(\xi))\}$$

où σ est la fonction définie par (4.5) pour l'ensemble E. Grâce au théorème précédent appliqué à φ et A, il existe une application $v \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ telle que $v = \varphi$ sur $\partial\Omega$, $Dv = constante = c_i$ sur Ω_i, $\bigcup_i \Omega_i = \Omega$ et c_i appartient à A. On sait résoudre le problème

$$\begin{cases} Du \in E & \text{p.p. dans } \Omega_i \\ u(x) = v(x) & x \in \partial\Omega_i \end{cases}$$

sur chaque Ω_i grâce au théorème 4.4.8. Soit u_i la solution sur Ω_i. Alors l'application définie comme $u = u_i$ sur Ω_i appartient à $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ et elle resou le problème (4.1). $\square$

4.5 Une représentation plus explicite de RcoE

Dans cette section nous allons écrire plus explicitement la formule de l'enveloppe rang un convexe d'un ensemble E défini par (4.2) où K composé par un nombre fini de points. On rappelle que Dacorogna-Marcellini [12] (théorème 7.18) ont montré la formule dans le cas où K est composé par un point, et Cardaliaguet-Tahraoui [7] l'ont donnée pour un K avec deux points. Nous allons donner la formule générale pour un K composé par n_0 points. Comme la représentation est peut être un peu compliquée, nous allons donner un exemple significatif pour un K composé par trois points (voir exemple (4.5.8)) .

On passe maintenant à expliquer les notations utilisées dans cette section :

Définition 4.5.1. *Soient* (a_i, b_i) *et* $(a_j, b_j) \in \mathbb{R}_+^2$ *tels que* $a_i, a_j > 0$, $a_i b_i > a_j b_j$ *et* $b_j - a_j > b_i - a_i \geq 0$. *Alors on définit*

$$\theta(i,j) = \frac{a_i b_i - a_j b_j}{b_j - a_j - (b_i - a_i)}\,.$$

Remarque 4.5.2. *D'un point de vue géométrique* $\theta(i,j)$ *représente l'abscisse du point d'intersection entre les droites* $\gamma_i(\theta) = a_i b_i + \theta(b_i - a_i)$ *et* $\gamma_j(\theta) = a_j b_j + \theta(b_j - a_j)$.

Remarque 4.5.3. *Soient* $\gamma_i(\theta) = a_i b_i + \theta(b_i - a_i)$ *pour* $i = 1, 2, 3$ *telles que* $b_3 - a_3 > b_2 - a_2 > b_1 - a_1 \geq 0$ *et* $a_1 b_1 > a_2 b_2 > a_3 b_3 > 0$. *Il y a deux possibilités :* $\theta(1,2) \leq \theta(1,3)$ *ou* $\theta(1,2) \geq \theta(1,3)$. *On voit facilement que*

$$\begin{array}{l} \text{si } \theta(1,2) \leq \theta(1,3) \text{ alors } \theta(1,2) \leq \theta(1,3) \leq \theta(2,3); \\ \text{si } \theta(1,3) \leq \theta(1,2) \text{ alors } \theta(2,3) \leq \theta(1,3) \leq \theta(1,2)\,. \end{array}$$

Ce raisonnement implique qu'il y a seulement deux possibilités :

$$\begin{array}{l} 1)\ \theta(1,2) \leq \theta(1,3) \leq \theta(2,3) \text{ ou} \\ 2)\ \theta(2,3) \leq \theta(1,3) \leq \theta(1,2)\,. \end{array}$$

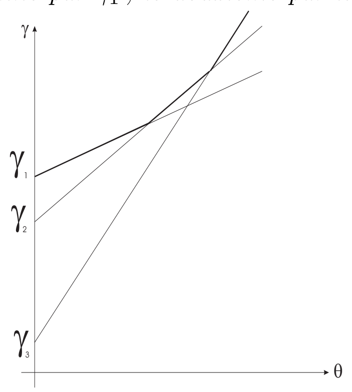
Par conséquent dans le cas 1)(cf. premier graphique)

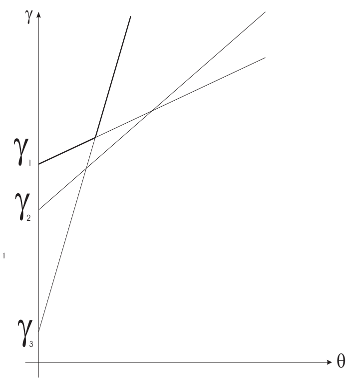
$$\sup\{\gamma_i(\theta), \theta \geq 0\} = \begin{cases} \gamma_1(\theta)\ \forall\ \theta \in [0, \theta(1,2)] \\ \gamma_2(\theta)\ \forall\ \theta \in [\theta(1,2), \theta(2,3)] \\ \gamma_3(\theta)\ \forall\ \theta \geq \theta(2,3)\,. \end{cases}$$

Dans le cas 2)(cf. deuxième graphique)

$$\sup\{\gamma_i(\theta), \theta \geq 0\} = \begin{cases} \gamma_1(\theta)\ \forall\ \theta \in [0, \theta(1,3)] \\ \gamma_3(\theta)\ \forall\ \theta \geq \theta(1,3)\,, \end{cases}$$

c'est à dire que le premier morceau linéaire de la fonction $\sup\{\gamma_i(\theta), \theta \geq 0\}$ *est donné par* γ_1 *; le deuxième par la droite* γ_j *qui minimise* $\theta(1,j), j = 2, 3$.





Cette remarque est valable aussi dans le cas où on veut calculer $\sup\{\gamma_i(\theta), \theta \geq \bar\theta\}$ *si les droites* $\gamma_j, j = 1, 2, 3$ *satisfont* $\gamma_1(\bar\theta) \geq \gamma_2(\bar\theta) \geq \gamma_3(\bar\theta)$ *et* $b_3 - a_3 > b_2 - a_2 > b_1 - a_1$. *En fait, considérons la fonction* $g(\theta) = \gamma_1(\theta) - \gamma_2(\theta)$. *Comme* $g(\bar\theta) > 0$ *et* g *est décroissante, il existe un point* θ_0 *tel que* $\theta_0 > \bar\theta$ *et* $g(\theta_0) = 0$. *Par la linéairité de* g *on a que* $g(\theta) > 0$ *pour tout* $\theta < \theta_0$ *et* $g(\theta) \leq 0$ *pour tout* $\theta \geq \theta_0$. *En particulier* $g(0) > 0$, *c'est à dire* $a_1 b_1 > a_2 b_2$. *Avec la même méthode on a que* $a_2 b_2 > a_3 b_3$. *On se retrouve alors dans les hypothèses de l'étude précédente.*

Pour la représentation de $\mathrm{Rco}\, E$, il nous sera utile le lemme suivant où on va étudier la fonction $m(\theta) = \max\limits_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a)$.

Lemme 4.5.4. *Soit* $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n_0} (a_i, b_i), 0 < a_i \leq b_i$. *Soient* $b_{k_0} = \max\{b_i\}$, $a_1 b_1 = \max\{a_i b_i\}$. *Soient*

$$\begin{aligned}
&\theta(1,2) = \min\{\theta(1,j) \ \ \forall\, j = 1, ..n_0 : b_j - a_j \geq b_1 - a_1, \theta(1,j) \leq b_{k_0}\} \\
&\theta(2,3) = \min\{\theta(2,j) \ \ \forall\, j = 2, ..n_0 : b_j - a_j \geq b_2 - a_2, \theta(2,j) \leq b_{k_0}\} \\
&... \\
&\theta(k_0-1, k_0) = \min\{\theta(k_0-1, j) \ \ \forall\, j = k_0 - 1, ..n_0 : \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad b_j - a_j \geq b_{k_0-1} - a_{k_0-1}, \theta(k_0-1, j) \leq b_{k_0}\}\,.
\end{aligned}$$

Supposons aussi que

$$\begin{aligned}
&b_1 - a_1 = \max\{b_j - a_j, a_j b_j = a_1 b_1\}; \\
&b_2 - a_2 = \max\{b_j - a_j, \theta(1,2) = \theta(1,j) \leq b_{k_0}\}; \\
&... \\
&b_{k_0} - a_{k_0} = \max\{b_j - a_j, \theta(k_0-1,k_0) = \theta(k_0-1,j) \leq b_{k_0}\}.
\end{aligned}$$

Alors pour tout $\theta \in [0, b_{k_0}]$

$$\max_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a) = \begin{cases} \gamma_1(\theta), \theta \in [0, \theta(1,2)] \\ ... \\ \gamma_{k_0}(\theta), \theta \in [\theta(k_0-1,k_0), b_{k_0}]\,. \end{cases}$$

Démonstration. Pour montrer la formule de l'énoncé on va expliciter la fonction $m(\theta) = \max\limits_{(a,b)\in K} ab + \theta(b-a)$. Avant de commencer on remarque que $m(\theta)$ est une fonction linéaire par morceaux, comme K est composé par un nombre fini de points. Par ailleurs elle est convexe et croissante.

On peut maintenant étudier la fonction m : on va diviser l'analyse en pas, et dans chacun on va étudier un morceau linéaire de m.
Pas 1) : Comme $a_1 b_1 \geq a_i b_i$, pour tout $i \in \{1, .., n_0\}$ alors le premier morceau linéaire sera défini par γ_1 par le théorème de la permanence du signe. Or, soit γ_j une droite telle que $b_j - a_j > b_1 - a_1$ (par convexité on considère seulement ces droites). Cette droite vérifie

$$\gamma_1(\theta) \geq \gamma_j(\theta)$$

si et seulement si $0 \leq \theta \leq \theta(1,j)$. L'hypothèse sur $\theta(1,2)$ nous assure qu'il existe une droite, γ_2, telle que $b_2 - a_2 > b_1 - a_1$ et telle que l'abscisse du point d'intersection avec γ_1 appartient à $[0, b_{k_0}]$. La remarque 4.5.3 avec cette hypothèse entraînent que m et égale à
$\cdot\ \gamma_1(\theta)$ pour tout $\theta \in [0, \theta(1,2)]$.

On va maintenant étudier le deuxième morceau linéaire de m.

Pas 2) : La remarque 4.5.3 et les hypothèses sur $\theta(1,2)$ nous permettent de dire que m est égal à $\gamma_2(\theta)$ pour tout θ dans un intervalle du type $[\theta(1,2), \bar{\theta}]$. On va maintenant étudier $\bar{\theta}$. Or, étudions l'inégalité $\gamma_2(\theta) \geq \gamma_j(\theta)$. Par convexité on considère seulement les droites γ_j telles que $b_j - a_j > b_2 - a_2$. De cette étude on tire que les droites candidates pour un troisième morceau linéaire sont les droites $\gamma_j : b_j - a_j > b_2 - a_2$ et $\theta(2,j) \leq b_{k_0}$. On observe que ces droites vérifient

$$\gamma_2(\theta(1,2)) \geq \gamma_j(\theta(1,2)).$$

Or, la remarque 4.5.3 appliquée pour tout $\theta \geq \theta(1,2)$ aux droites $\gamma_j : b_j - a_j > b_2 - a_2$ et $\theta(2,j) \leq b_{k_0}$ et l'hypothèse sut $\theta(2,3)$ impliquent que m est égale à :
· $\gamma_1(\theta)$ pour tout $\theta \in [0, \theta(1,2)]$
· $\gamma_2(\theta)$ pour tout $\theta \in [\theta(1,2), \theta(2,3)]$.

Par itération on peut montrer le lemme. Le dernier morceau linéaire sera $\gamma_{k_0}(\theta)$ pour tout $\theta \in [\theta(k_0-1, k_0), b_{k_0}]$. En fait par le pas précédent $m(\theta) = \gamma_{k_0}(\theta)$ si $\theta \in [\theta(k_0-1,k_0), \bar{\theta}]$ pour un certain $\bar{\theta} > \theta(k_0-1,k_0)$. Supposons par contradiction que dans $[\theta(k_0-1,k_0), b_{k_0}]$ il existe un autre morceau linéaire, donné par $\bar{\gamma}(\theta) = \bar{a}\bar{b} + \theta(\bar{b} - \bar{a})$. Sûrement $\bar{b} - \bar{a} > b_{k_0} - a_{k_0}$. Alors on peut dire que $\bar{\gamma}(b_{k_0}) > \gamma_{k_0}(b_{k_0})$, c'est à dire $\bar{\gamma}(b_{k_0}) > b_{k_0}^2$ (comme on a vu dans la proposition 4.2.6). Par le théorème de la permanence du signe appliqué à la fonction $\bar{\gamma}(\theta) - \theta^2$ on a que $\bar{\gamma}(\theta) > \theta^2$ pour tout $\theta \in [b_{k_0}, \theta_0]$ pour un certain $\theta_0 > b_{k_0}$, ce qui est absurde, puisque $\max\limits_{(x,y)\in K} xy + \theta(y-x) < \theta^2$ pour tout $\theta > b_{k_0}$, comme on a vu dans la proposition 4.2.6. □

On va maintenant énoncer la théorème de représentation de Rco E. On rappelle que, comme on a vu dans la section isopreliminaires,

$$\mathrm{Rco}E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) \leq \sigma(\lambda_1(\xi))\}$$

où σ est la fonction définie par 4.5. Ce qu'on va faire sera expliciter la fonction σ.

Théorème 4.5.5. *Soit*

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K\},$$

où $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n_0} (a_i, b_i), 0 < a_i \leq b_i$. *Soient* $b_{k_0} = \max\{b_i\}$, $a_1 b_1 = \max\{a_i b_i\}$. *Soient*

$$\begin{aligned}
&\theta(1,2) = \min\{\theta(1,j) \ \ \forall\, j = 1, ..n_0 : b_j - a_j \geq b_1 - a_1, \theta(1,j) \leq b_{k_0}\} \\
&\theta(2,3) = \min\{\theta(2,j) \ \ \forall\, j = 2, ..n_0 : b_j - a_j \geq b_2 - a_2, \theta(2,j) \leq b_{k_0}\} \\
&... \\
&\theta(k_0-1, k_0) = \min\{\theta(k_0-1, j) \ \ \forall\, j = k_0-1, ..n_0 : \\
&\qquad\qquad b_j - a_j \geq b_{k_0-1} - a_{k_0-1}, \theta(k_0-1, j) \leq b_{k_0}\}.
\end{aligned}$$

Supposons aussi que

$$\begin{aligned}
&b_1 - a_1 = \max\{b_j - a_j, a_j b_j = a_1 b_1\}; \\
&b_2 - a_2 = \max\{b_j - a_j, \theta(1,2) = \theta(1,j) \leq b_{k_0}\}; \\
&... \\
&b_{k_0} - a_{k_0} = \max\{b_j - a_j, \theta(k_0-1,k_0) = \theta(k_0-1,j) \leq b_{k_0}\}.
\end{aligned}$$

Alors Rco $E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) \leq \sigma(\lambda_1(\xi))\}$, *où*

$$\sigma(x) = \min\left\{\frac{a_1 b_1}{x}, b_{k_0}, \frac{\theta(j-1,j)x + a_j b_j + \theta(j-1,j)(b_j - a_j)}{x + \theta(j-1,j)}\right\}.$$

Remarque 4.5.6. *On peut toujours supposer les hypothèses du théorème précédent, à une permutation près de K.*

Remarque 4.5.7. *On observe que ce résultat généralise celui de [7] (cf. proposition 6.8) pour un K composé par deux éléments. En fait, soit*

$$K = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}.$$

Supposons sans perte de généralité que $a_1b_1 > a_2b_2$. Alors il peut y avoir deux cas :
a) : $b_1 \geq b_2$;
b) : $b_2 > b_1$;

On va étudier le cas a) : $b_1 \geq b_2$. Dans ce cas on peut avoir que $b_2 - a_2 < b_1 - a_1$ ou $b_1 - a_1 \leq b_2 - a_2$. Dans le premier cas

$$\sigma(x) = \inf\left\{\frac{a_1b_1}{x}, b_1\right\}.$$

Dans le deuxième cas, comme $\theta(1,2) \geq b_1$ alors on a

$$\sigma(x) = \inf\left\{\frac{a_1b_1}{x}, b_1\right\}.$$

On peut maintenant étudier le cas b) : $b_2 > b_1$: nécessairement $a_1 > a_2$. Dans ce cas on peut avoir seulement que $a_1 > a_2$, ce qui implique que $\theta(1,2) < b_2$ et donc

$$\sigma(x) = \inf\left\{\frac{a_1b_1}{x}, b_2, \frac{\theta(1,2)x + a_1b_1 + \theta(1,2)(b_1 - a_1)}{x + \theta(1,2)}\right\}.$$

En résumant, si on suppose, $a_1 \geq a_2$ on obtient trois différents cas :

de l'étude précédent, sous l'hypothèse $a_1b_1 > a_2b_2$ on a deux cas :
1) $a_1b_1 > a_2b_2$ et $b_2 > b_1$, ce qui implique que

$$\sigma(x) = \inf\left\{\frac{a_1b_1}{x}, b_2, \frac{\theta(1,2)x + a_1b_1 + \theta(1,2)(b_1 - a_1)}{x + \theta(1,2)}\right\}.$$

2) $b_1 \geq b_2$ et $b_2 - a_2 > b_1 - a_1$, ce qui implique que

$$\sigma(x) = \inf\left\{\frac{a_1b_1}{x}, b_1\right\}.$$

Maintenant il faut étudier le cas $a_1 \geq a_2$ et $a_1b - 1 \leq a_2b_2$. En récrivant l'étude précédent en appelant $(a_1, b_1)(a_2, b_2)$ et vice-versa, on obtient le cas
3) $b_1 < b_2$ et $a_1b_1 \leq a_2b_2$, ce qui implique que

$$\sigma(x) = \inf\left\{\frac{a_2b_2}{x}, b_2\right\}.$$

En résumant on a, si on suppose $a_1 \geq a_2$,
1) $a_1b_1 > a_2b_2$ et $b_2 > b_1$, ce qui implique que

$$\sigma(x) = \inf\left\{\frac{a_1b_1}{x}, b_2, \frac{\theta(1,2)x + a_1b_1 + \theta(1,2)(b_1 - a_1)}{x + \theta(1,2)}\right\}.$$

2) $b_1 \geq b_2$ ce qui implique que

$$\sigma(x) = \inf\left\{\frac{a_1 b_1}{x}, b_1\right\}.$$

3) $b_1 < b_2$ et $a_1 b_1 \leq a_2 b_2$, ce qui implique que

$$\sigma(x) = \inf\left\{\frac{a_2 b_2}{x}, b_2\right\}.$$

qui correspondent au trois cas de [7] (cf. proposition 6.8).

Démonstration. On a vu que

$$\sigma(x) = \min_{\theta \in [0, \max\limits_{(a,b)\in K} b]} \frac{\theta x + m(\theta)}{x + \theta}$$

On va diviser l'étude de cette fonction en $x = 0$ et $x > 0$.
Soit $x = 0$: alors

$$\sigma(0) = \min_{\theta \in [0, \max\limits_{(a,b)\in K} b]} \frac{m(\theta)}{\theta}.$$

Or, si γ_j est un morceau linéaire qui compose $m(\theta)$ on pose

$$l(\theta) = \frac{a_j b_j + \theta(b_j - a_j)}{\theta}.$$

Cette fonction est monotone et donc elle atteint son minimum sur les extrêmes de l'intervalle où elle est définie, c'est à dire sur les points $\theta(j, j-1), \theta(j, j+1)$. Ceci implique que

$$\sigma(0) = \inf\left\{b_{k_0}, \frac{a_j b_j + \theta(j-1, j)(b_j - a_j)}{\theta(j-1, j)}, j = 2, .., k_0 - 1\right\}.$$

Étudions maintenant la fonction σ pour $x > 0$. Sur chaque droite γ_j qui compose $m(\theta)$ on a

$$\frac{\theta x + m(\theta)}{x + \theta} = \frac{\theta x + a_j b_j + \theta(b_j - a_j)}{x + \theta}$$

On pose $l(\theta) = \frac{\theta x + a_j b_j + \theta(b_j - a_j)}{x + \theta}$. On remarque que $l(\theta)$ est monotone et donc $l(\theta)$ atteint son inf sur les extrêmes de l'intervalle où elle est définie, c'est à dire sur les points $\theta(j, j-1), \theta(j, j+1)$. Ceci implique que

$$\begin{aligned}\sigma(x) = \min\Bigg\{ & \frac{a_1 b_1}{x}, \frac{\theta(1,2)x + a_1 b_1 + \theta(1,2)(b_1 - a_1)}{x + \theta(1,2)}, \\ & \frac{\theta(j-1,j)x + a_j b_j + \theta(j-1,j)(b_j - a_j)}{x + \theta(j-1,j)}, j = 2..k_0 - 1 \\ & \frac{\theta(j,j+1)x + a_j b_j + \theta(j,j+1)(b_j - a_j)}{x + \theta(j,j+1)}, j = 2..k_0 - 1 \\ & \frac{\theta(k_0-1,k_0)x + a_{k_0} b_{k_0} + \theta(k_0-1,k_0)(b_{k_0} - a_{k_0})}{x + \theta(k_0-1,k_0)}, b_{k_0}\Bigg\}.\end{aligned}$$

Comme $\gamma_j(\theta(j,j+1)) = \gamma_{j+1}(\theta(j,j+1))$ alors

$$\sigma(x) = \min\left\{\frac{a_1b_1}{x}, b_{k_0}, \frac{\theta(j,j+1)x + a_jb_j + \theta(j,j+1)(b_j - a_j)}{x + \theta(j,j+1)}, j = 1..k_0 - 1\right\}.$$

On remarque que si x est suffisamment petit,

$$\sigma(x) = \min\left\{b_{k_0}, \frac{\theta(j,j+1)x + a_jb_j + \theta(j,j+1)(b_j - a_j)}{x + \theta(j,j+1)}, j = 1..k_0 - 1\right\}$$

et $\lim_{x\to 0} \sigma(x) = \sigma(0)$ par la continuité de σ. On a donc trouvé la formule de l'énoncé. □

Exemple 4.5.8. *On veut calculer l'enveloppe rang un convexe de l'ensemble*

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in K\}$$

où K est composé par trois éléments $(a_i, b_i), i = 1,2,3$ qui satisfont les conditions suivantes :

$$a_1b_1 > a_2b_2 > a_3b_3, \quad b_3 > \max\{b_1, b_2\}.$$

Il suffit de calculer la fonction $\sigma(x)$. On remarque que $b_3 - a_3 \geq b_1 - a_1$, parce que $a_1b_1 > a_3b_3$ et $b_3 > b_1$ impliquent que $a_3 \leq a_1$ et donc $b_3 - a_3 \geq b_1 - a_1$. On va diviser l'étude en deux cas :

$$\begin{aligned} &b_2 - a_2 \leq b_1 - a_1;\\ &b_2 - a_2 > b_1 - a_1\,. \end{aligned}$$

Dans le premier cas, c'est à dire $b_2 - a_2 \leq b_1 - a_1$, il n'existe pas un point d'intersection entre γ_1 et γ_2 dans $\mathbb{R}^2_+$. Par contre il existe un point d'intersection entre γ_1 et γ_3. Comme $\theta(1,3) \leq b_3$, grâce au théorème précédent on a

$$\sigma(x) = \inf\left\{\frac{a_1b_1}{x}, b_3, \frac{x\theta(1,3) + a_3b_3 + \theta(1,3)(b_3 - a_3)}{x + \theta(1,3)}\right\}.$$

Dans le deuxième cas, c'est à dire $b_2 - a_2 > b_1 - a_1$, on va distinguer deux possibilités :

$$\begin{aligned} &b_3 - a_3 > b_2 - a_2 > b_1 - a_1;\\ &b_2 - a_2 > b_3 - a_3 > b_1 - a_1\,. \end{aligned}$$

On note tout de suite que le dernier cas, c'est à dire $b_2 - a_2 > b_3 - a_3 > b_1 - a_1$ est impossible, parce que les hypothèses $a_2b_2 > a_3b_3$ et $b_3 > b_2$ impliquent que $a_2 > a_3$ et $b_3 > b_2$. On va alors étudier l'unique cas possible, c'est à dire $b_3 - a_3 > b_2 - a_2 > b_1 - a_1$. On remarque que le point d'intersection entre γ_1 et γ_3 satisfait $\theta(1,3) \leq b_3$. Grâce au théorème précédent on peut alors dire que si $\theta(1,2) < \theta(1,3)$ alors

$$\sigma(x) = \inf\left\{\frac{a_1b_1}{x}, b_3, \frac{x\theta(j,j+1) + a_jb_j + \theta(j,j+1)(b_j - a_j)}{x + \theta(j,j+1)}, j = 1,2\right\}.$$

Si $\theta(1,2) \geq \theta(1,3)$ alors

$$\sigma(x) = \inf\left\{\frac{a_1b_1}{x}, b_3, \frac{x\theta(1,3) + a_1b_1 + \theta(1,3)(b_1 - a_1)}{x + \theta(1,3)}\right\}.$$

En résumant on a

$$\sigma(x) = \inf\left\{\frac{a_1b_1}{x}, b_3, \frac{x\theta(1,3) + a_3b_3 + \theta(1,3)(b_3 - a_3)}{x + \theta(1,3)}\right\}$$

si $b_2 - a_2 \leq b_1 - a_1$ *ou* $b_2 - a_2 > b_1 - a_1$ *et* $\theta(1,2) \geq \theta(1,3)$;

$$\sigma(x) = \inf\left\{\frac{a_1b_1}{x}, b_3, \frac{x\theta(j,j+1) + a_jb_j + \theta(j,j+1)(b_j - a_j)}{x + \theta(j,j+1)}, j = 1,2\right\},$$

si $b_2 - a_2 > b_1 - a_1$ *et* $\theta(1,2) < \theta(1,3)$.

4.6 Appendice

Cette section est divisée en trois parties. Dans la première on va rappeler la définition des valeurs singulières d'une matrice de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ et certaines des leurs propriétés. Dans la deuxième on va établir deux propositions sur les ensembles isotropes (dont on va donner la définition après). Enfin dans la troisième on va montrer que l'équivalence entre rang un convexité et polyconvexité, qui est vraie pour les ensembles isotropes compacts de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, n'est pas valable pour les fonctions isotropes : on donnera en fait un exemple de fonction isotrope rang un convexe non polyconvexe.

4.6.1 Valeurs singulières

Si A est une matrice de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, on dénote par $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A)$ les valeurs propres de la matrice $\sqrt{AA^t}$. On rappelle que

$$\lambda_1(A) = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\|A\|^2 + 2|det(A)|} - \sqrt{\|A\|^2 - 2|det(A)|}\right]$$

$$\lambda_2(A) = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\|A\|^2 + 2|det(A)|} + \sqrt{\|A\|^2 - 2|det(A)|}\right].$$

On remarque que les fonctions $\lambda_i(\xi), i = 1,2$ sont continues.

Par ailleurs ([20] page 144) on a la proposition suivante :

Proposition 4.6.1. *Soit* $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. *Alors*

1) $[\lambda_1(A)]^2 + [\lambda_2(A)]^2 = \|A\|^2, \quad \lambda_1(A)\lambda_2(A) = |\det A|$,
2) $\exists\, U, V \in \mathcal{O}(2)$ *et* $D = diag(\lambda_1(A), \lambda_2(A))$ *telles que* $A = UDV$.

On rappelle aussi cette propriété (voir [20], théorème 3.3.16) :

Proposition 4.6.2. *La fonction* $\xi \to \lambda_2(\xi)$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

4.6.2 Ensembles isotropes

Définition 4.6.3. *Un ensemble* $W \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ *est isotrope si* $RWS = W$ *pour toute matrice* $R, S \in \mathcal{O}(2)$.

Remarque 4.6.4. *Un ensemble isotrope* W *de* $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *est nécessairement de la forme*

$$W = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in w\}$$

pour un certain $w \subset T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$.

Proposition 4.6.5. *Soit $V \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ isotrope et fermé. Alors int V est isotrope.*

Démonstration. Soit ξ dans int$V$. Soient $R, S \in \mathcal{O}(2)$ et considérons $R\xi S$: il faut montrer que $R\xi S \in \text{int}V$, c'est à dire que si D est une matrice de norme suffisamment petite, alors $R\xi S + D \in V$. Comme $\xi \in \text{int}V$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(\xi) \subset V$. Par conséquent on a que

$$\|R\xi S + D\| = \|R^{-1}(R\xi S + D)S^{-1}\| = \|\xi + R^{-1}DS^{-1}\| < \varepsilon$$

si $\|R^{-1}DS^{-1}\| = \|D\|$ est suffisamment petite, c'est à dire $R\xi S \in \text{int}V$. □

Proposition 4.6.6. *Soit $V \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ isotrope. Alors $\overline{V}$ est isotrope.*

Démonstration. Soit $\xi_0 \in \overline{V}$; alors il existe une suite $\xi_n \in V$ telle que $\xi_0 = \lim_{n\to\infty} \xi_n$. Ceci implique que $R\xi_0 S = \lim_{n\to\infty} R\xi_n S$ pour toute $R, S \in \mathcal{O}(2)$. Comme V est isotrope, $R\xi_n S \in V$, ce qui implique que $R\xi_0 S = \lim_{n\to\infty} R\xi_n S \in \overline{V}$. On a donc montré que $\overline{V}$ est isotrope. □

4.6.3 Fonctions isotropes

Définition 4.6.7. *Soit $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$. On dit que F est isotrope si $F(\xi) = F(R\xi S)$ pour toute matrice $R, S \in \mathcal{O}(2)$. Dans une façon équivalente on peut dire qu'il existe une fonction $f : T \to \mathbb{R}$ telle que $F(\xi) = f(\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi))$, si $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y\}$.*

Dans cette section nous allons donner un exemple de fonction $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ isotrope, qui soit rang un convexe mais non polyconvexe. On rappelle que, au contraire, pour les ensembles isotropes de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ Cardaliaguet-Tahraoui ont montré qu'un ensemble compact isotrope $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ est rang un convexe si et seulement s'il est polyconvexe (voir théorème 4.2.2).

L'exemple que nous allons présenter a été trouvé par Šilhavý [34]. Nous allons en donner une démonstration différente. On rappelle que Dacorogna-Marcellini [11] et Aubert [2] ont donné des exemples de fonctions isotropes rang un convexes non polyconvexes définies sur $\mathbb{R}^{2\times 2}_+$.

Pour montrer l'existence de telle F nous allons utiliser plusieurs résultats : le premier est dû à Šverák [31].

Proposition 4.6.8. *Soient $f, g : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ deux fonctions rang un convexes. Soit $\mathcal{U}$ une composante connexe de l'ensemble $\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : f(\xi) > g(\xi)\}$. Alors*

$$F(\xi) = \begin{cases} f(\xi), & \text{si } \xi \in \mathcal{U} \\ g(\xi), & \text{ailleurs} \end{cases}$$

est rang un convexe.

On aura besoin aussi du lemme suivant :

Lemme 4.6.9. *Soit $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ une fonction polyconvexe telle que $\dfrac{|f(\xi)|}{|\xi|} \le a, a \in \mathbb{R}_+$ pour $|\xi|$ suffisamment grand. Alors f est convexe.*

Remarque 4.6.10. *Pour la preuve on a été inspiré par [8], page 152.*

Démonstration. Comme f est polyconvexe, on peut dire que pour tout $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ il existe $\beta(A) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ et $\gamma(A) \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(B) \geq f(A) + <\beta(A); B - A> + \gamma(A)(\det B - \det A), \forall\, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(voir théorème 1.3 page 106 de [8]). Pour montrer le lemme il suffit de montrer que pour toute $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\gamma(A) = 0$. Or, supposons que $\gamma(A) > 0$: si on choisi $B = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, t > 0$ on a

$$\frac{f(B)}{|B|} \geq \frac{f(A) + <\beta(A); B - A> + \gamma(A)(\det B - \det A)}{|B|}.$$

Si t est suffisamment grand on peut dire que

$$a \geq \frac{f(A) + <\beta(A); B - A> + \gamma(A)(\det B - \det A)}{|B|}.$$

En passant à la limite pour $t \to \infty$ on obtient $a \geq +\infty$ ce qui est une contradiction. Si $\gamma(A) < 0$, il suffit de choisir $B = \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ et refaire le raisonnement précédent pour arriver à une contradiction. □

On peut maintenant montrer le théorème suivant :

Théorème 4.6.11. *La fonction $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(\xi) = \begin{cases} \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi), & si\ \lambda_2(\xi) < 1 \\ \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi) - 1, & si\ \lambda_2(\xi) \geq 1 \end{cases}$$

est isotrope, rang un convexe et non polyconvexe.

Démonstration. Évidemment la fonction F est isotrope. D'ailleurs elle n'est pas polyconvexe : en fait, on observe tout d'abord que, comme λ_2 est une norme sur $\mathbb{R}^{2\times 2}$, alors il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $c_1|\xi| \leq \lambda_2(\xi) \leq c_2|\xi|$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Si $|\xi|$ est suffisamment grande on peut écrire

$$f(\xi) = |f(\xi)| = \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi) - 1 \leq 2\lambda_2(\xi) \leq 2c_2|\xi|.$$

Supposons par contradiction que F soit polyconvexe. Alors F doit être convexe par le lemme précédent, mais elle n'est pas convexe, puisque $F(\xi) = |\det(\xi)|$ si $\lambda_2(\xi) < 1$.

La fonction F est rang un convexe : pour montrer ceci on va utiliser la proposition 4.6.8. Considérons les fonctions

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) \\ g(\xi) &= \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi) - 1 : \end{aligned}$$

elles sont rang un convexes parce que f est polyconvexe et g est convexe (voir [12], théorème 7.8). Or, étudions l'inégalité $f(\xi) > g(\xi)$: elle est vérifiée si et seulement si $(\lambda_1(\xi) - 1)(\lambda_2(\xi) - 1) > 0$; comme $\lambda_1(\xi) \leq \lambda_2(\xi)$, ceci est équivalent à $\lambda_1(\xi) > 1$ ou $\lambda_2(\xi) < 1$. Cette étude implique que

$$A = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : f(\xi) > g(\xi)\} = A_1 \cup A_2,$$

où

$$A_1 = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi) > 1\}, \quad A_2 = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) < 1\}\,.$$

On va maintenant montrer que A_2 est une composante connexe de A. On remarque que l'ensemble A_2 est convexe, grâce aux propriétés de $\lambda_2(\xi)$, et donc connexe. Supposons par contradiction que il ne soit pas une composante connexe de A. Alors il existe $\mathcal{C}$, composante connexe de A telle que

$$A_2 \subsetneq \mathcal{C}.$$

On remarque que A_2 est ouvert, et donc ∂A_2 ne peut pas être contenu dans A_2. D'autre part, ∂A_2 ne peut pas être contenu dans A_1, parce que

$$\overline{A_2} \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) \leq 1\}$$

et

$$\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) \leq 1\} \cap A_1 = \emptyset.$$

De ceci on tire que ∂A_2 ne peut pas être contenu dans A, et donc il ne peut pas être contenu dans $\mathcal{C} \subseteq A$. Par conséquent

$$A_2 = \overline{A_2} \cap \mathcal{C}\,;$$

ceci implique que A_2 est fermé dans la topologie relative à $\mathcal{C}$. D'ailleurs A_2 est ouvert dans la topologie relative à $\mathcal{C}$, parce qu'il est ouvert dans $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Ceci entraîne que $\mathcal{C}$, qui est connexe, contient un ensemble (A_2) qui est ouvert et fermé en même temps, ce qui est une contradiction. Alors $\mathcal{C} = A_2$, et donc A_2 est une composante connexe de A. On peut, par conséquent, appliquer la proposition 4.6.8 aux fonctions f, g et à la composante connexe A_2 pour obtenir le résultat. □

Remarque 4.6.12. *On remarque que les ensembles de niveau de la fonction F définie dans le théorème précédent sont bornés (et fermés, comme F est continue). En fait, évidemment si $\lambda_2(\xi) < 1$ les ensembles de niveau sont bornés. Étudions le cas $\lambda_2(\xi) > 1$: sur cet ensemble la fonction $F(\xi)$ vaut $\lambda_1(\xi)+\lambda_2(\xi)-1$; alors, fixé $s \in \mathbb{R}$, on a*

$$\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi) - 1 \leq s\} \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) \leq s+1\}$$

ce qui est borné, comme $\lambda_2(\xi)$ est une norme sur $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Ceci implique que l'exemple que nous avons présenté fournit une fonction F dont tous les ensembles de niveau sont polyconvexes (par le résultat de Cardaliaguet-Tahraoui [7], car ils sont isotropes et rang un convexes, par la rang un convexité de F), mais la fonction n'est pas polyconvexe.

Chapitre 5

Une inclusion différentielle de deuxième ordre

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier l'existence de fonctions $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ où Ω est un ouvert borné, qui satisfont le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right| = a_{ij} & \text{p.p. dans } \Omega \\ u(x) = \varphi(x) & x \in \partial\Omega \\ Du(x) = D\varphi(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

où $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $a_{ij} > 0$ pour $i, j = 1, 2$ et $a_{12} = a_{21}$ et $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée. On va trouver une fonction $u \in \varphi + W_0^{2,\infty}(\Omega)$ solution de ce problème.

Ce problème peut être écrit, de façon équivalente sous forme d'inclusion différentielle, c'est à dire comme

$$D^2u(x) \in E \text{ p.p. dans } \Omega, \text{ où } E = \{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : |\xi_{ij}| = a_{ij}, i, j = 1, 2\}.$$

Avec cette formulation on peut maintenant énoncer le théorème d'existence que nous avons établi :

Théorème 5.1.1. *Soient $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ et $\varphi \in C^2_{morc}(\bar{\Omega})$ telle que $D^2\varphi(x) \in E \cup \operatorname{int}\mathrm{Rco}E$ dans Ω. Alors il existe $u \in \varphi + W_0^{2,\infty}(\Omega) : D^2u \in E$ p.p. dans Ω.*

Dans le théorème d'existence cité ci-dessus nous avons utilisé le résultat suivant, établi par Dacorogna-Tanteri (cas $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \leq 0$)[15] et Dolzmann (cas $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$)[16] sur l'enveloppe rang un convexe de l'ensemble E :

Théorème 5.1.2. *1) Si $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ alors*

$$\mathrm{Rco}E = \{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : |\xi_{11}| \leq a_{11}, |\xi_{22}| \leq a_{22}, |\xi_{12}| = a_{12}\}, \quad \operatorname{int}\mathrm{Rco}E = \emptyset\,;$$

2) si $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$ alors

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Rco}E &= \{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : |\xi_{ij}| \le a_{ij}, i,j=1,2,\\
&\qquad |a_{22}\xi_{11} - a_{11}\xi_{22}| \le -\det\xi + a_{11}a_{22} - a_{12}^2,\\
&\qquad |a_{22}\xi_{11} + a_{11}\xi_{22}| \le 2|\xi_{12}|a_{12} + \det\xi + a_{11}a_{22} - a_{12}^2\},\\
\mathrm{int}\,\mathrm{Rco}E &= \{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : |\xi_{ij}| < a_{ij}, i,j=1,2,\\
&\qquad |a_{22}\xi_{11} - a_{11}\xi_{22}| < -\det\xi + a_{11}a_{22} - a_{12}^2,\\
&\qquad |a_{22}\xi_{11} + a_{11}\xi_{22}| < 2|\xi_{12}|a_{12} + \det\xi + a_{11}a_{22} - a_{12}^2\}.
\end{aligned}
$$

On remarque que dans le cas où $a_{12} \in (0,1)$ en particulier on a montré l'existence d'une fonction $u \in W_0^{2,\infty}(\Omega)$ telle que

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right| = \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right| = 1, \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right| = a_{12}\,.$$

Si $a_{12} = 1$ il semblerait (cf. Remarque 5.3.3) qu'il n'existe pas une telle solution.

Dans la dernière partie de ce chapitre nous allons étudier l'enveloppe polyconvexe de l'ensemble E. On rappelle que Dolzmann a établi pour premier la formule de $\mathrm{Pco}\,E$ (voir aussi [15]) en prouvant par ailleurs que l'enveloppe quasiconvexe coïncide avec l'enveloppe rang un convexe ; nous allons présenter une démonstration différente du théorème suivant :

Théorème 5.1.3. *Soient $a_{ij} > 0, i,j = 1,2$; alors*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pco}E = \{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : |\xi_{ij}| \le a_{ij}, i,j=1,2,\\
|a_{22}\xi_{11} - a_{11}\xi_{22}| \le -\det\xi + a_{11}a_{22} - a_{12}^2\}\,.
\end{aligned}
$$

5.2 L'enveloppe rang un convexe

Dans cette section nous allons établir la formule pour $\mathrm{Rco}E$: considérons les cas $a_{11}a_{22} < a_{12}^2$ et $a_{11}a_{22} \ge a_{12}^2$ séparément. Le premier cas a été établi par Dacorogna-Tanteri [15] et nous ne reproduisons pas ici la démonstration. Par contre, dans l'autre cas nous allons présenter une version légèrement différente de la démonstration de Dolzmann [16].
On définit alors

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} = \{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} :\ & |\xi_{ij}| \le a_{ij}, i,j=1,2, && (5.2)\\
& (\xi_{11} - a_{11})(\xi_{22} + a_{22}) \le \xi_{12}^2 - a_{12}^2 && (5.3)\\
& (\xi_{11} + a_{11})(\xi_{22} - a_{22}) \le \xi_{12}^2 - a_{12}^2 && (5.4)\\
& (\xi_{11} - a_{11})(\xi_{22} - a_{22}) \ge (|\xi_{12}| - a_{12})^2 && (5.5)\\
& (\xi_{11} + a_{11})(\xi_{22} + a_{22}) \ge (|\xi_{12}| - a_{12})^2\,\}. && (5.6)
\end{aligned}
$$

Le but sera d'établir que $\mathcal{A} = \mathrm{Rco}E$, et on va le faire par double inclusion.

Remarque 5.2.1. *On remarque que si $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ alors $\mathrm{Rco}E = \mathrm{Pco}E$. En fait, dans ce cas les relations*

$$|\xi_{ij}| \le a_{ij}, i,j = 1,2, \quad |a_{22}\xi_{11} - a_{11}\xi_{22}| \le -\det\xi \tag{5.7}$$

impliquent automatiquement que

$$|a_{22}\xi_{11} + a_{11}\xi_{22}| \le 2|\xi_{12}|a_{12} + \det\xi\,.$$

Pour montrer ceci, supposons par exemple que $\xi_{12} > 0$ *(les cas* $\xi_{12} < 0$ *et* $\xi_{12} = 0$ *sont similaires) : il faut alors prouver que*

$$2\xi_{12}a_{12} + \det\xi - (a_{22}\xi_{11} + a_{11}\xi_{22}) \geq 0\,,$$
$$2\xi_{12}a_{12} + \det\xi + a_{22}\xi_{11} + a_{11}\xi_{22} \geq 0\,.$$

Posons $g(\xi_{11}) = 2\xi_{12}a_{12} + \det\xi - (a_{22}\xi_{11} + a_{11}\xi_{22})$ *pour* $|\xi_{11}| \leq a_{11}$ *: il faut montrer que* $g(\xi_{11}) \geq 0$ *pour tout* $(\xi)_{ij}, i, j = 1, 2$ *qui vérifient (5.7). Or,* $g'(\xi_{11}) \leq 0$. *On va étudier* $g(a_{11})$. *Les relations (5.7) impliquent pour* $\xi_{11} = a_{11}$ *que*

$$\xi_{12}^2 \leq a_{12}^2 = a_{11}a_{22} \leq \xi_{12}^2$$

c'est à dire $\xi_{12} = a_{12}$. *On a alors que* $g(a_{11}) = 0$, *ce qui conclut la preuve. Avec le même raisonnement on peut montrer que* $2\xi_{12}a_{12} + \det\xi + a_{22}\xi_{11} + a_{11}\xi_{22} \geq 0$.

Dans la démonstration il nous sera utile le résultat suivant :

Lemme 5.2.2. *Soit* E *un ensemble de* $\mathbb{R}^{n\times n}$. *Soient* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *deux matrices telles que* $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$. *Alors*

$$\mathrm{Rco}(AEB) = A\mathrm{Rco}E\,B\,.$$

Démonstration. En utilisant la proposition 3.2.4 il suffit de montrer que

$$\mathrm{R}_i\mathrm{co}(AEB) = A\mathrm{R}_i\mathrm{co}EB \;\; \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

On fera la démonstration par induction.
- Pour $i = 0$ le résultat est vrai.
- Supposons que $\mathrm{R}_i\mathrm{co}(AEB) = A\mathrm{R}_i\mathrm{co}EB$: on veut montrer que

$$\mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}(AEB) = A\mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}EB\,.$$

On va montrer que
$$\mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}(AEB) \subseteq A\mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}EB.$$
Soit $\xi \in \mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}(AEB)$. Alors il existe M_1, M_2 tels que

$$\xi = tM_1 + (1-t)M_2\;, M_1, M_2 \in \mathrm{R}_i\mathrm{co}(AEB),\;\; \mathrm{rg}(M_1 - M_2) = 1\,.$$

Par hypothèse inductive, $\mathrm{R}_i\mathrm{co}(AEB) = A\mathrm{R}_i\mathrm{co}EB$: ceci implique que

$$M_1 = A\tilde{M}_1B,\;\; M_2 = A\tilde{M}_2B\,,\;\; \tilde{M}_1, \tilde{M}_2 \in \mathrm{R}_i\mathrm{co}E\,.$$

Par conséquent

$$\xi = tA\tilde{M}_1B + (1-t)A\tilde{M}_2B = A[t\tilde{M}_1 + (1-t)\tilde{M}_2]B;$$

puisque

$$0 = \det(M_1 - M_2) = \det(A\tilde{M}_1B - A\tilde{M}_2B) = \det A\det(\tilde{M}_1 - \tilde{M}_2)\det B$$

et $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ on a $\det(\tilde{M}_1 - \tilde{M}_2) = 0$ et donc

$$t\tilde{M}_1 + (1-t)\tilde{M}_2 \in \mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}E$$

ce qui implique que
$$\xi \in A\mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}EB.$$
On a alors que $\mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}(AEB) \subseteq A\mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}EB$. On va maintenant montrer l'inclusion inverse :
$$\mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}(AEB) \supseteq A\mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}EB :$$
celle-ci impliquera le résultat.

Soit $\xi \in \mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}E$; alors
$$\xi = tM_1 + (1-t)M_2,\ M_1, M_2 \in \mathrm{R}_i\mathrm{co}E,\ \mathrm{rg}(M_1 - M_2) = 1.$$
Considérons $A\xi B$: alors
$$A\xi B = A[tM_1 + (1-t)M_2]B = tAM_1B + (1-t)AM_2B\,,$$
avec $AM_1B, AM_2B \in A\mathrm{R}_i\mathrm{co}EB = \mathrm{R}_i\mathrm{co}(AEB)$ (par hypothèse inductive). Comme $\det(M_1 - M_2) = 0$, alors
$$\det(AM_1B - AM_2B) = \det(M_1 - M_2) = 0;$$
par conséquent
$$A\xi B \in \mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}(AEB)\,.$$
On a alors prouvé que $\mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}(AEB) \supseteq A\mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}EB$. □

Grâce au lemme précédent, pour calculer $\mathrm{Rco}E$ on peut supposer que $a_{11} = a_{22} = 1$: en fait si $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$ on définit
$$A = I,\ B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{12} & 1 \end{pmatrix}; \tag{5.8}$$
ce choix implique que
$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{12} & 1 \end{pmatrix}.$$
Dans le cas $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$ il suffit de choisir
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_{11}}{a_{12}} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{12}} \end{pmatrix} \tag{5.9}$$
pour avoir que
$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Avec cette réduction notre but sera d'établir que l'enveloppe rang un convexe de
$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}_s : |\xi_{11}| = |\xi_{22}| = 1,\ |\xi_{12}| = a_{12}\}$$
est
$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}_s :\ & |\xi_{11}| \leq 1, && (5.10)\\
& |\xi_{22}| \leq 1, && (5.11)\\
& |\xi_{12}| \leq a_{12}, && (5.12)\\
& (\xi_{11} - 1)(\xi_{22} - 1) \geq (|\xi_{12}| - a_{12})^2 && (5.13)\\
& (\xi_{11} + 1)(\xi_{22} + 1) \geq (|\xi_{12}| - a_{12})^2 && (5.14)\\
& (\xi_{11} + 1)(\xi_{22} - 1) \leq \xi_{12}^2 - a_{12}^2 && (5.15)\\
& (\xi_{11} - 1)(\xi_{22} + 1) \leq \xi_{12}^2 - a_{12}^2\}. && (5.16)
\end{aligned}$$

Proposition 5.2.3. $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Rco}E$.

Démonstration. Puisque $\mathcal{A}$ est compact, il suffit de montrer que

$$\partial\mathcal{A} \subset \mathrm{Rco}E.$$

En fait, soit $\xi \in \mathrm{int}\mathcal{A}$; pour tout λ de rang un, il existe $t_1 = t_1(\lambda) < 0 < t_2 = t_2(\lambda)$ tels que $\xi + t_i\lambda \in \partial\mathcal{A}, i = 1, 2$. En posant $\xi_i = \xi + t_i\lambda, i = 1, 2$, on a que

$$\xi = \frac{t_2\xi_1 - t_1\xi_2}{t_2 - t_1} \in \mathrm{Rco}E\,.$$

Soit $\xi \in \partial\mathcal{A}$; alors ξ satisfait une égalité parmi les relations qui définissent $\mathcal{A}$ (sinon, si ξ satisfait (5.10), (5.11), (5.12), (5.13), (5.14), (5.15) et (5.16) avec des inégalités strictes, alors $\xi \in \mathrm{int}\mathcal{A}$, comme $\mathcal{A}$ est l'intersection d'ensembles de niveau des fonctions continues). Par symétrie on peut supposer que $\xi_{12} \geq 0$.

On va diviser la démonstration en plusieurs étapes : dans chaque étape nous allons étudier le cas où ξ satisfait une égalité parmi (5.10), (5.11), (5.12), (5.13), (5.14), (5.15), (5.16). Dans les étapes 1) et 2) on va étudier les cas simples où un des $|\xi_{ij}| = a_{ij}$.

étape 1 : Soit ξ un élément de $\partial\mathcal{A}$ tel que $\xi_{11} = 1$; par (5.16) on a que $\xi_{12}^2 \geq a_{12}^2$, et donc $\xi_{12} = a_{12}$; d'ailleurs, puisque $|\xi_{22}| \leq 1$, il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $\xi_{22} = \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot (-1)$. Par conséquent

$$\xi = \lambda\xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{12} & 1 \end{pmatrix}, \; \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{12} & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathrm{rang}(\xi_1 - \xi_2) \leq 1$, alors $\xi \in \mathrm{Rco}E$.

Si $\xi_{11} = -1$, ou $\xi_{22} = 1$, ou $\xi_{22} = -1$, on fait un raisonnement analogue.

étape 2 : Soit ξ un élément de $\partial\mathcal{A}$ tel que $\xi_{12} = a_{12}$; comme $|\xi_{11}| \leq 1$ et $|\xi_{22}| \leq 1$ pour certains $\lambda, s \in [0, 1]$ on a

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} & a_{12} \\ a_{12} & \xi_{22} \end{pmatrix} = \lambda\eta_1 + (1 - \lambda)\eta_2,$$

avec

$$\eta_1 = s \begin{pmatrix} -1 & a_{12} \\ a_{12} & 1 \end{pmatrix} + (1 - s) \begin{pmatrix} -1 & a_{12} \\ a_{12} & -1 \end{pmatrix},$$

$$\eta_2 = s \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{12} & 1 \end{pmatrix} + (1 - s) \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{12} & -1 \end{pmatrix};$$

comme $\mathrm{rang}(\eta_1 - \eta_2) \leq 1$, alors $\xi \in \mathrm{Rco}E$.

Dans les étapes suivantes on peut supposer que $|\xi_{11}|, |\xi_{22}| \neq 1$, et $\xi_{12} \neq a_{12}$, parce que sinon on se retrouve dans les étape 1 et 2.

On va maintenant étudier les cas où ξ satisfait une égalité parmi (5.13) ou (5.14).

étape 3 : Supposons que $\xi \in \mathcal{A}$ satisfait (5.13) avec égalité, c'est à dire

$$(\xi_{11} - 1)(\xi_{22} - 1) = (\xi_{12} - a_{12})^2 \Longleftrightarrow \det(\xi - A) = 0, \; A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{12} & 1 \end{pmatrix} \in E\,. \tag{5.17}$$

On va montrer que

$$\exists\; G \in \mathrm{Rco}E \text{ avec } \det(A - G) = 0 \text{ telle que } \xi = \lambda A + (1 - \lambda)G\,. \tag{5.18}$$

Ceci impliquera par définition de Rco$E$ que $\xi \in \mathrm{Rco}E$. Il suffit de définir

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

avec

$$g_{11} = 1 - \frac{2a_{12}(1-\xi_{11})}{a_{12}-\xi_{12}}, \quad g_{22} = 1 - \frac{2a_{12}(1-\xi_{22})}{a_{12}-\xi_{12}},$$

et

$$\lambda = \frac{a_{12}+\xi_{12}}{2a_{12}} :$$

ce choix implique que $\xi = \lambda A + (1-\lambda)G$ et $\det(A-G) = 0$ par (5.17). Il nous reste à montrer que $G \in \mathrm{Rco}E$. Vérifions que $|g_{11}|, |g_{22}| \leq 1$: ceci et le fait que $|G_{12}| = a_{12}$ impliquent que $G \in \mathrm{Rco}\, E$ par l'étape 2.

Sûrement $g_{11} \leq 1$. On va contrôler que $g_{11} \geq -1$, c'est à dire $\frac{1}{a_{12}} \geq \frac{1-\xi_{11}}{a_{12}-\xi_{12}}$. On sait que

$$(\xi_{11}-1)(\xi_{22}-1) = (\xi_{12}-a_{12})^2$$

et

$$(\xi_{11}+1)(\xi_{22}-1) \leq \xi_{12}^2 - a_{12}^2;$$

si on soustrait membre à membre on obtient

$$-\xi_{22}+1 \geq a_{12}(a_{12}-\xi_{12});$$

grâce à (5.17) on a

$$\frac{1}{a_{12}} \geq \frac{a_{12}-\xi_{12}}{1-\xi_{22}} = \frac{1-\xi_{11}}{a_{12}-\xi_{12}},$$

c'est à dire $|g_{11}| \leq 1$.

Avec un raisonnement analogue on obtient que $|g_{22}| \leq 1$ (on utilisera que $(\xi_{11}-1)(\xi_{22}+1) \leq \xi_{12}^2 - a_{12}^2$).

étape 4 : Supposons que $\xi \in \mathcal{A}$ satisfait (5.14), c'est à dire

$$(\xi_{11}+1)(\xi_{22}+1) = (\xi_{12}-a_{12})^2 \Longleftrightarrow \det(\xi - B) = 0, \tag{5.19}$$

où $B = \begin{pmatrix} -1 & a_{12} \\ a_{12} & -1 \end{pmatrix} \in E$. Il suffit de suivre la même démarche que celle de l'étape 3.

Maintenant on va étudier les derniers cas, où ξ satisfait (5.15) ou (5.16) comme égalité.

étape 5 : Supposons que ξ satisfait l'égalité (5.15). On définit deux ensembles :

$$V := \{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : (\xi_{11}+1)(\xi_{22}-1) = \xi_{12}^2 - a_{12}^2\} \text{ et } Y := \partial\mathcal{A} \cap V.$$

Alors $\xi \in \text{int rel}Y$ (intérieur relatif). Maintenant on va montrer que

$$\exists\ W \text{ de rang 1 telle que } \xi + tW \in V, \forall\ t \in \mathbb{R}$$

(l'existence d'un tel W sera utile pour la suite). On cherche $w = (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $uv \neq 0$ tel que si

$$W = w \otimes w = \begin{pmatrix} u^2 & uv \\ uv & v^2 \end{pmatrix}$$

alors $\xi + tW$ satisfait l'égalité (5.15) $\forall\, t \in \mathbb{R}$, c'est à dire

$$(\xi_{11} + tu^2 + 1)(\xi_{22} + tv^2 - 1) = (\xi_{12} + tuv)^2 - a_{12}^2, \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{5.20}$$

Cette égalité est équivalente à

$$(\xi_{11}+1)(\xi_{22}-1)+t^2u^2v^2+tu^2(\xi_{22}-1)+tv^2(\xi_{11}+1) = \xi_{12}^2+t^2u^2v^2+2tuv\xi_{12}-a_{12}^2.$$

En employant que ξ satisfait (5.15), on en tire que

$$u^2(\xi_{22} - 1) + v^2(\xi_{11} + 1) = 2uv\xi_{12}.$$

Cette équation en u admet deux solutions, parce que son discriminant est positif : en fait

$$\frac{\Delta}{4} = [\xi_{12}^2 - (\xi_{22} - 1)(\xi_{11} + 1)]v^2 = a_{12}^2 v^2 > 0.$$

Grâce à l'existence de W on peut affirmer, puisque Y est compact, qu'il existe $t_1 < 0 < t_2$ tels que

$$\xi + t_i W \in \partial Y,\ i = 1, 2\,.$$

Ceci veut dire que $\xi + t_i W$ satisfait, en dehors de l'égalité (5.15), une égalité parmi les relations (5.10), (5.11), (5.12), (5.13), (5.14), (5.16). Si $\xi + t_i W$ satisfait (5.10), (5.11), (5.12), (5.13) ou (5.14) sous forme d'égalité, les étapes précédentes impliquent que

$$\xi + t_i W \in \mathrm{Rco}E, i = 1, 2$$

et donc

$$\xi = \frac{t_2}{t_2 - t_1}(\xi + t_1 W) - \frac{t_1}{t_2 - t_1}(\xi + t_2 W) \in\ \mathrm{Rco}E\,.$$

Il reste à étudier le cas où $\xi + t_i W$ satisfait (5.16) sous forme d'égalité : dans ce cas aussi on veut montrer que $\xi + t_i W \in \mathrm{Rco}E$ (et par conséquent $\xi \in \mathrm{Rco}E$). On observe que $\xi + t_i W$ appartient à $H \cap \partial Y$, où

$$H := \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (\xi_{11} + 1)(\xi_{22} - 1) = \xi_{12}^2 - a_{12}^2, (\xi_{11} - 1)(\xi_{22} + 1) = \xi_{12}^2 - a_{12}^2\}\,.$$

Nous allons prouver que

$$H \cap \partial Y \subseteq \mathrm{Rco}E.$$

Ceci impliquera que $\xi + t_1 W, \xi + t_2 W \in \mathrm{Rco}E$ et donc le résultat.

Il est utile de représenter les matrices dans H : si $\eta \in H$ (sans perte de généralité on peut supposer, par symétrie, que $\eta_{12} \geq 0$) alors $(\eta_{11}+1)(\eta_{22}-1) = (\eta_{11} - 1)(\eta_{22} + 1)$; donc $\eta_{11} = \eta_{22}$ et $\eta_{11}^2 - 1 = \eta_{12}^2 - a_{12}^2$. Ceci entraîne que les matrices dans H sont toutes du type, pour $\eta_{12} \geq 0$,

$$\begin{pmatrix} \sigma\sqrt{\eta_{12}^2 + 1 - a_{12}^2} & \eta_{12} \\ \eta_{12} & \sigma\sqrt{\eta_{12}^2 + 1 - a_{12}^2} \end{pmatrix}, \sigma \in \{-1, 1\}\,.$$

On divise l'étude de l'inclusion $H \cap \partial Y \subset \mathrm{Rco}E$ en deux cas : $a_{12} < 1$ et $a_{12} = 1$.
<u>*cas* $a_{12} < 1$</u> : Soit par exemple $\sigma = 1$; si $\eta \in H \cap \partial Y$, η satisfait

$$(\eta_{11} - 1)(\eta_{22} - 1) \geq (\eta_{12} - a_{12})^2$$

ce qui est équivalent, dans H, à

$$a_{12}(a_{12} - 1) \geq \eta_{12}(a_{12} - 1).$$

On a que $\eta \in \partial Y$ et donc $|\eta_{12}| \leq a_{12}$; comme $a_{12} < 1$ la dernière inégalité implique que

$$\eta_{12} = a_{12}\,.$$

Par l'étape 2, $\eta \in \mathrm{Rco}E$.
<u>*cas* $a_{12} = 1$</u> : Dans ce cas H est composé par les matrices du type

$$\begin{pmatrix} \sigma\eta_{12} & \eta_{12} \\ \eta_{12} & \sigma\eta_{12} \end{pmatrix}, \quad \sigma \in \{-1, 1\},\ \text{avec}\ \eta_{12} \in [0, 1].$$

Alors, si $\lambda = \frac{1+\eta_{12}}{2} \in [0, 1]$ on a

$$\begin{pmatrix} \eta_{12} & \eta_{12} \\ \eta_{12} & \eta_{12} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} -\eta_{12} & \eta_{12} \\ \eta_{12} & -\eta_{12} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est à dire qu'on peut exprimer les matrices de H comme combinaison rang un convexe de deux matrices dans E, et donc $H \cap \partial Y \subseteq \mathrm{Rco}E$.
étape 6 : Supposons que ξ satisfait l'égalité (5.16). On suit la même démarche que dans l'étape 5).

On a alors montré que $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Rco}E$.

$\square$

Nous allons maintenant montrer l'inclusion inverse $\mathrm{Rco}E \subseteq \mathcal{A}$; pour cela nous avons besoin des résultats suivants. On dira que $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}_s$ est définie positive (négative) si ses valeurs propres satisfont $\mu_2(X) \geq \mu_1(X) > 0$ ($\mu_1(X) \leq \mu_2(X) < 0$). On dira par ailleurs que X est sémidéfinie positive (négative) si ses valeurs propres satisfont $\mu_2(X) \geq \mu_1(X) \geq 0$ ($\mu_1(X) \leq \mu_2(X) \leq 0$).

Proposition 5.2.4. *La fonction $F : \mathbb{R}^{2\times 2}_s \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(X) = \begin{cases} detX, & \textit{si } X \textit{ définie positive} \\ 0 & \textit{autrement}, \end{cases}$$

est rang un convexe.

On rappelle que Šverák [32] a montré que F est quasiconvexe, dans un cadre plus général. Le résultat que nous allons présenter est plus faible, mais obtenu par des méthodes d'algèbre linéaire, plus élémentaires que celles de Šverák.

Nous allons rappeler les formules suivantes sur les matrices symétriques.

Lemme 5.2.5. *Soient C, D deux matrices symétriques 2×2. Alors*

$$\mu_2(C) + \mu_1(D) \leq \mu_2(C+D) \leq \mu_2(C) + \mu_2(D); \tag{5.21}$$

$$\mu_1(C+D) \leq \mu_1(C) + \mu_2(D); \tag{5.22}$$

$$\mu_1(C) \leq \mu_1(C+H)\,\forall\, H \text{ sémidéfinie positive}; \tag{5.23}$$

$$\mu_1(C+D) + \mu_2(C+D) = \mu_1(C) + \mu_2(C) + \mu_1(D) + \mu_2(D). \tag{5.24}$$

Pour la démonstration de (5.21), (5.22), (5.23) voir [4], pages 62-63 ; pour (5.24) voir [19], page 194.

On peut passer maintenant à la preuve de la proposition 5.2.4.

Démonstration. Soient A_1et A_2 deux matrices telles que $\mathrm{rg}(A_1 - A_2) \leq 1$, c'est à dire $\det(A_1 - A_2) = 0$. Il faut montrer que

$$F(tA_1 + (1-t)A_2) \leq tF(A_1) + (1-t)F(A_2) \ \forall\ t \in [0,1].$$

On va supposer que $\det(tA_1 + (1-t)A_2) > 0$. Le cas $\det(tA_1 + (1-t)A_2) \leq 0$ est en fait trivial, car alors $F(tA_1 + (1-t)A_2) = 0$. D'ailleurs on peut supposer que les deux valeurs propres de $tA_1 + (1-t)A_2$ sont positives, sinon le résultat est à nouveau trivial.

Il faut alors étudier les cas suivants, si $\mu_1(A_i) \leq \mu_2(A_i)$ sont les valeurs propres de la matrice A_i :

$$\begin{aligned}
&i)\det A_1 > 0,\ \det A_2 > 0 \Longleftrightarrow \mu_1(A_1)\mu_2(A_1) > 0,\ \mu_1(A_2)\mu_2(A_2) > 0\\
&ii)\det A_1 \leq 0,\ \det A_2 \leq 0 \Longleftrightarrow \mu_1(A_1)\mu_2(A_1) \leq 0,\ \mu_1(A_2)\mu_2(A_2) \leq 0\\
&iii)\det A_1 \leq 0,\ \det A_2 > 0 \Longleftrightarrow \mu_1(A_1)\mu_2(A_1) \leq 0,\ \mu_1(A_2)\mu_2(A_2) > 0\\
&iv)\det A_1 > 0,\ \det A_2 \leq 0 \Longleftrightarrow \mu_1(A_1)\mu_2(A_1) > 0,\ \mu_1(A_2)\mu_2(A_2) \leq 0\,.
\end{aligned}$$

i) On voudrait montrer que A_1 et A_2 sont définies positives, c'est à dire $\mu_i(A_1) > 0$ et $\mu_i(A_2) > 0, \forall\ i = 1, 2$. On observe qu'on ne peut pas avoir simultanément $\mu_1(A_1) \leq \mu_2(A_1) < 0$ et $\mu_1(A_2) \leq \mu_2(A_2) < 0$, parce que sinon, grâce à (5.24) écrite pour $C = tA_1$ et $D = (1-t)A_2$, on aurait

$$\begin{aligned}
&0 < \mu_1(tA_1 + (1-t)A_2) + \mu_2(tA_1 + (1-t)A_2) =\\
&= t\mu_1(A_1) + t\mu_2(A_1) + (1-t)\mu_1(A_2) + (1-t)\mu_2(A_2) < 0.
\end{aligned}$$

Supposons que

$$\mu_1(A_1) \leq \mu_2(A_1) < 0 \text{ et } 0 < \mu_1(A_2) \leq \mu_2(A_2) \tag{5.25}$$

(si $\mu_1(A_2) \leq \mu_2(A_2) < 0$ et $0 < \mu_1(A_1) \leq \mu_2(A_1)$ le raisonnement est analogue). On a deux cas à étudier, puisque $\det(A_2 - A_1) = 0$: $\mu_1(A_2 - A_1) = 0$ et $\mu_2(A_2 - A_1) = 0$.

Dans le cas $\mu_1(A_2 - A_1) = 0$, en écrivant (5.21) pour $C = A_1$ et $D = -A_2$ on obtient que

$$0 = -\mu_1(A_2 - A_1) = \mu_2(A_1 - A_2) \leq \mu_2(A_1) + \mu_2(-A_2) = \mu_2(A_1) - \mu_1(A_2)$$

ce qui implique que $0 \leq \mu_1(A_2) \leq \mu_2(A_1)$: ceci est en contradiction avec (5.25).

Dans le deuxième cas, $\mu_2(A_2 - A_1) = 0$, il suffit d'écrire (5.21) avec $C = A_2$ et $D = -A_1$ pour obtenir

$$\mu_2(A_2) - \mu_2(A_1) = \mu_2(A_2) + \mu_1(-A_1) \leq \mu_2(A_2 - A_1) = 0$$

ce qui implique que $0 \leq \mu_2(A_2) \leq \mu_2(A_1)$: ceci est en contradiction avec (5.25).

Par conséquent on a montré que

$$0 < \mu_1(A_1) \leq \mu_2(A_1) \text{ et } 0 < \mu_1(A_2) \leq \mu_2(A_2)\,.$$

On a alors que $F(A_1) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_1) > 0$ et $F(A_2) = \mu_1(A_2)\mu_2(A_2) > 0$; comme $F(tA_1 + (1-t)A_2) = \det(tA_1 + (1-t)A_2) = t\mu_1(A_1)\mu_2(A_1) + (1-t)\mu_1(A_2)\mu_2(A_2)$ (parce que la fonction det est rang un affine, voir [8] page 117), on obtient le résultat.
cas ii) On voit tout de suite que ce cas est impossible parce que, comme $F(tA_1 + (1-t)A_2) = \det(tA_1 + (1-t)A_2) > 0$, alors par la rang un affinité de la fonction det

$$0 < t\det A_1 + (1-t)\det A_2 = t\mu_1(A_1)\mu_2(A_1) + (1-t)\mu_1(A_2)\mu_2(A_2) \le 0\,.$$

Il nous reste à étudier les cas iii) et iv). On observe qu'il suffit d'étudier le cas iii). En fait, pour le cas iv) si on pose $t = 1 - s$ et on se retrouve dans iii).
iii) On voudrait montrer que A_2 est définie positive, c'est à dire $0 < \mu_1(A_2) \le \mu_2(A_2)$. Supposons par contradiction que

$$\mu_1(A_2) \le \mu_2(A_2) < 0\,.$$

On note que $-A_2$ est un matrice définie positive ; alors on peut écrire (5.23) avec $C = tA_1 + (1-t)A_2$ et $H = -\frac{1-t}{2}A_2$:

$$0 < \mu_1(tA_1 + (1-t)A_2) \le \mu_1\left(tA_1 + \frac{1-t}{2}A_2\right).$$

Or, en écrivant (5.22) avec $C = tA_1$ et $D = \frac{1-t}{2}A_2$ on a, comme nécessairement $\mu_1(A_1) \le 0 \le \mu_2(A_1)$

$$0 < \mu_1\left(tA_1 + \frac{1-t}{2}A_2\right) \le t\mu_1(A_1) + \frac{1-t}{2}\mu_2(A_2) < 0,$$

ce qui est absurde. On a alors que

$$\mu_1(A_1) \le 0 \le \mu_2(A_1) \text{ et } 0 < \mu_1(A_2) \le \mu_2(A_2)\,.$$

Ceci implique que $F(A_1) = 0$, $F(A_2) > 0$ et donc le résultat, car comme $rg(A_1 - A_2) = 1$, on a

$$\begin{aligned} &F(tA_1 + (1-t)A_2) = \det(tA_1 + (1-t)A_2) = t\det A_1 + (1-t)\det A_2 \\ &\le (1-t)\det A_2 = tF(A_1) + (1-t)F(A_2)\,. \end{aligned}$$

□

Corollaire 5.2.6. *La fonction $G(\xi) = F(-\xi) : \mathbb{R}^{2\times 2}_s \to \mathbb{R}$ est rang un convexe.*

Démonstration. Soient A une matrice symétrique et λ une matrice symétrique de rang un. Alors, puisque F est une fonction rang un convexe,

$$\begin{aligned} G(tA + (1-t)(A+\lambda)) &= F(t(-A) + (1-t)(-A-\lambda)) \\ &\le tF(-A) + (1-t)F(-A-\lambda) = tG(A) + (1-t)G(A+\lambda). \end{aligned}$$

□

Remarque 5.2.7. *On remarque que*

$$G(X)=F(-X)=\begin{cases} detX, & si\ det(X)>0, X_{11}+X_{22}<0\,,\\ 0 & sinon\,. \end{cases}$$

En fait il est utile de rappeler qu'une matrice $\eta\in\mathbb{R}^{2\times 2}_s$ *est définie positive si et seulement si* $\det(\eta)>0$ *et si* $\eta_{11}+\eta_{22}>0$; *elle est définie négative si et seulement si* $\det(\eta)>0$ *et* $\eta_{11}+\eta_{22}<0$.

Dans la preuve de l'inclusion $\mathcal{A}\supseteq \mathrm{Rco}E$ nous allons employer aussi les observations suivantes.

On peut écrire $\mathcal{A}$ sous la forme :

$$\mathcal{A}=P\cap\{\xi\in\mathbb{R}^{2\times 2}_s : \xi \text{ satisfait } (5.13),(5.14)\},$$

où

$$\begin{aligned} P=\{\xi\in\mathbb{R}^{2\times 2}_s :\ & |\xi_{11}|\le 1, |\xi_{22}|\le 1, |\xi_{12}|\le a_{12},\\ & (\xi_{11}-1)(\xi_{22}+1)\le \xi_{12}^2-a_{12}^2\\ & (\xi_{11}+1)(\xi_{22}-1)\le \xi_{12}^2-a_{12}^2\} \end{aligned} \tag{5.26}$$

est un ensemble polyconvexe, parce qu'il est l'intersection d'ensembles de niveau de fonctions polyconvexes suivantes :

$$\begin{aligned} &f_1(\xi)=|\xi_{ii}|-1,\ i=1,2\\ &f_2(\xi)=|\xi_{12}|-a_{12}\\ &f_3(\xi)=(\xi_{11}-1)(\xi_{22}+1)-\xi_{12}^2+a_{12}^2=\det(\xi-A)\\ &f_3(\xi)=(\xi_{11}+1)(\xi_{22}-1)-\xi_{12}^2+a_{12}^2=\det(\xi-B)\,, \end{aligned}$$

où

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12}\\ -a_{12} & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & a_{12}\\ -a_{12} & 1\end{pmatrix}.$$

Lemme 5.2.8. *Soit* $\xi\in P$, *avec* $\xi_{11}\cdot\xi_{22}\le 0$ *et* $\xi_{12}=0$. *Alors* $\xi\in\mathcal{A}$.

Démonstration. Supposons par exemple que $\xi_{11}\le 0$ et $\xi_{22}\ge 0$. Il faut montrer que

$$(\xi_{11}\pm 1)(\xi_{22}\pm 1)\ge a_{12}^2.$$

Puisque $-(\xi_{11}+1)(\xi_{22}-1)\ge a_{12}^2$, on obtient le résultat si on vérifie que

$$(\xi_{11}\pm 1)(\xi_{22}\pm 1)\ge -(\xi_{11}+1)(\xi_{22}-1),$$

qui est équivalent à

$$(\xi_{11}+1)(\xi_{22}+1)\ge -(\xi_{11}+1)(\xi_{22}-1),\quad (\xi_{11}-1)(\xi_{22}-1)\ge -(\xi_{11}+1)(\xi_{22}-1),$$

relations vérifiées par hypothèse. □

Proposition 5.2.9. $\mathcal{A}\supseteq \mathrm{Rco}E$.

Démonstration. Comme $\mathcal{A}\supset E$, il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est rang un convexe : donc on veut prouver que si ξ et $\xi+\lambda$, où $\lambda\in\mathbb{R}^{2\times 2}_s$ est une matrice de rang un, appartiennent à $\mathcal{A}$, alors

$$t\xi+(1-t)(\xi+\lambda)\in\mathcal{A},\ \forall\ t\in[0,1].$$

On peut supposer que
$$\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \end{pmatrix}$$
sans perte de généralité. Sûrement $t\xi+(1-t)(\xi+\lambda) \in P$ (ensemble polyconvexe) ; par conséquent il nous manque à vérifier que $t\xi + (1-t)(\xi+\lambda)$ satisfait les inégalités (5.13) et (5.14). Il y a deux cas à étudier : $\xi_{12}(\xi+\lambda)_{12} \geq 0$ et $\xi_{12}(\xi+\lambda)_{12} < 0$.

cas 1) Si $\xi_{12}(\xi+\lambda)_{12} \geq 0$ il suffit de réécrire les inégalités (5.13) et (5.14) sous la forme suivante, respectivement :

$$\begin{array}{lll} \text{si } \xi_{12} \geq 0 & -\det(\xi - A_1) \leq 0, & A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{12} & 1 \end{pmatrix}, \\ & -\det(\xi - B_1) \leq 0, & B_1 = \begin{pmatrix} -1 & a_{12} \\ a_{12} & -1 \end{pmatrix}; \\ \text{si } \xi_{12} < 0 & -\det(\xi - A_2) \leq 0, & A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12} \\ -a_{12} & 1 \end{pmatrix}, \\ & -\det(\xi - B_2) \leq 0, & B_2 = \begin{pmatrix} -1 & -a_{12} \\ -a_{12} & -1 \end{pmatrix}; \end{array}$$

c'est à dire que si $\xi_{12}(\xi+\lambda)_{12} \geq 0$, $\mathcal{A}$ est l'intersection d'ensembles de niveau de fonctions polyconvexes et donc $\mathcal{A} \supseteq \mathrm{Rco}\, E$.

cas 2) Soit $\xi_{12} \cdot (\xi+\lambda)_{12} < 0$; sans perte de généralité on peut supposer que $\xi_{12} < 0$ et $(\xi+\lambda)_{12} > 0$. La matrice λ de rang un sera
$$\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \end{pmatrix},$$
avec $\alpha_1\alpha_2 > 0$, puisque $\xi_{12} + \alpha_1\alpha_2 > 0$ et $\xi_{12} < 0$. Considérons une matrice particulière du segment entre ξ et $\xi + \lambda$:
$$\xi^0 = \begin{pmatrix} \xi_{11} - \dfrac{\xi_{12}}{\alpha_2}\alpha_1 & 0 \\ 0 & \xi_{22} - \dfrac{\xi_{12}}{\alpha_1}\alpha_2 \end{pmatrix} = \bar{t}\xi + (1-\bar{t})(\xi+\lambda),\ \bar{t} = \frac{\xi_{12}+\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}.$$

On veut montrer que $\xi^0 \in \mathcal{A}$; supposons par l'absurde que $\xi^0 \notin \mathcal{A}$; comme $\xi^0 \in P$, alors ξ^0 viole (5.13) ou (5.14). Nous allons étudier ces cas séparément. Expliquons maintenant la structure de chaque cas. Nous allons chercher une fonction f (différente dans chaque cas) rang un convexe et non négative sur $\mathbb{R}_s^{2\times 2}$ telle que
$$f(X) = 0 \text{ sur } E \tag{5.27}$$
et
$$f(\xi^0) > 0. \tag{5.28}$$
Ces conditions sont suffisantes pour arriver à une contradiction : voyons pourquoi. La condition (5.27) entraîne que $f \equiv 0$ sur $\mathrm{Rco}E$; en fait, si $\mathrm{R}_i\mathrm{co}E$ sont les ensembles définis dans la proposition 3.2.4 alors par induction on a que $f(\mathrm{R}_i\mathrm{co}E) \leq 0$ pour toute $i \in \mathbb{N}$; comme $f(X) \geq 0\, \forall\, X \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}$, alors $f(\mathrm{R}_i\mathrm{co}E) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et donc $f(\mathrm{Rco}E) = 0$. En particulier $f(\xi) = 0 = f(\xi+\lambda)$, parce que $\xi, \xi+\lambda \in \mathcal{A} \subseteq \mathrm{Rco}E$. Par ailleurs, considérons la fonction
$$h(t) := f(t\xi + (1-t)(\xi+\lambda)) :$$

h est convexe, $h(0) = h(1) = 0$; alors $h(t) \leq 0, \forall\, t \in [0,1]$; en particulier $h(\bar{t}) \leq 0$. Ceci est une contradiction avec (5.28), qui entraîne $h(\bar{t}) > 0$.

Comme expliqué ci-dessus, on va diviser la démonstration en deux cas, selon si ξ^0 viole (5.13) ou (5.14).

étape 1 : Supposons que ξ^0 viole (5.13), c'est à dire ξ^0 satisfait

$$(\xi^0_{11} - 1)(\xi^0_{22} - 1) < a^2_{12}\,,$$

qui est équivalent à

$$a^2_{12} - 1 + \xi^0_{11} + \xi^0_{22} > 0;$$

puisque $a_{12} < 1$, alors $\xi^0_{11} + \xi^0_{22} > 0$. D'ailleurs le lemme précédent appliqué à ξ^0 nous permet de supposer que $\xi^0_{11} \cdot \xi^0_{22} > 0$ qui implique que $\xi^0_{11}, \xi^0_{22} > 0$.

Maintenant on va chercher une fonction f rang un convexe et positive sur $\mathbb{R}^{2\times 2}_s$ qui satisfasse (5.27) et (5.28). On cherchera f du type

$$f(X) = \begin{cases} \det(X - B), & \text{si } X - B \text{ définie positive} \\ 0 & \text{autrement}\,. \end{cases}$$

(pour une certaine matrice $B = (b_{ij}), i, j = 1,2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}_s$ à définir après) : en fait, grâce au lemme 5.2.4, cette fonction est rang un convexe et positive sur $\mathbb{R}^{2\times 2}_s$. On choisi $b_{12} = 0$.

On a que $f(X) = 0$ sur E si $X - B$ n'est pas définie positive sur E. Des conditions suffisantes sont

$$b_{11} > 0,\ b_{22} > 0 \text{ et } (1 - b_{11})(\pm 1 - b_{22}) < a^2_{12} \tag{5.29}$$

(en fait ces conditions impliquent respectivement que

$$M = \begin{pmatrix} -1 - b_{11} & \pm a_{12} \\ \pm a_{12} & \pm 1 - b_{22} \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 1 - b_{11} & \pm a_{12} \\ \pm a_{12} & \pm 1 - b_{22} \end{pmatrix}$$

satisfont $M_{11} + M_{22} < 0$ et $\det N < 0$). Par ailleurs $f(\xi^0) > 0$ si

$$\begin{cases} \xi_{11} - \dfrac{\xi_{12}}{\alpha_2}\alpha_1 - b_{11} > 0 \\ \xi_{22} - \dfrac{\xi_{12}}{\alpha_1}\alpha_2 - b_{22} > 0 \\ \left(\xi_{11} - \dfrac{\xi_{12}}{\alpha_2}\alpha_1 - b_{11}\right)\left(\xi_{22} - \dfrac{\xi_{12}}{\alpha_1}\alpha_2 - b_{22}\right) > b^2_{12}\,. \end{cases}$$

Des conditions suffisantes pour le système précédent sont, en choisissant $b_{12} = 0$

$$\begin{cases} \xi_{11} - \dfrac{\xi_{12}}{\alpha_2}\alpha_1 - b_{11} > 0 \\ \xi_{22} - \dfrac{\xi_{12}}{\alpha_1}\alpha_2 - b_{22} > 0\,. \end{cases}$$

En réécrivant ces conditions avec (5.29) on a

$$\begin{cases} b_{ii} > 0, i = 1,2 \\ (1 - b_{11})(\pm 1 - b_{22}) < a^2_{12} \\ \xi_{11} - \dfrac{\xi_{12}}{\alpha_2}\alpha_1 - b_{11} > 0 \\ \xi_{22} - \dfrac{\xi_{12}}{\alpha_1}\alpha_2 - b_{22} > 0\,. \end{cases}$$

On observe que $\xi_{11}^0 = \xi_{11} - \frac{\xi_{12}}{\alpha_2}\alpha_1 \le 1$, et donc $b_{11} < \xi_{11} - \frac{\xi_{12}}{\alpha_2}\alpha_1$ implique que $b_{11} < 1$. Comme $b_{22} > 0$, la deuxième condition avec le $-$ est satisfaite trivialement. Alors réécrivons le système (avec les conditions non triviales) :

$$\begin{cases} 0 < b_{11} < \xi_{11} - \dfrac{\xi_{12}}{\alpha_2}\alpha_1 \\ \max\left\{0, 1 - \dfrac{a_{12}^2}{1-b_{11}}\right\} < b_{22} < \xi_{22} - \dfrac{\xi_{12}}{\alpha_1}\alpha_2 \,. \end{cases}$$

Pour ceci choisissons $b_{11} = b_{11}(\xi_{ij}, \alpha_1, \alpha_2, a_{12})$ tel que

$$\xi_{11} - \frac{\xi_{12}}{\alpha_2}\alpha_1 > b_{11} > \max\left\{0, 1 - \frac{a_{12}^2}{1 - \xi_{22} + \frac{\xi_{12}}{\alpha_1}\alpha_2}\right\},$$

et $b_{22} = b_{22}(\xi_{ij}, \alpha_1, \alpha_2, a_{12})$ tel que

$$\xi_{22} - \frac{\xi_{12}}{\alpha_2}\alpha_1 > b_{22} > \max\left\{0, 1 - \frac{a_{12}^2}{1-b_{11}}\right\}.$$

En fait ce choix est trivialement une solution du système, parce que ξ^0 viole (5.13), ce qui implique que

$$\xi_{11} - \frac{\xi_{12}}{\alpha_2}\alpha_1 > 1 - \frac{a_{12}^2}{1 - \xi_{22} + \frac{\xi_{12}}{\alpha_1}\alpha_2}.$$

Par ailleurs $\xi_{11} - \xi_{12}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 0$, comme on a vu précédemment.
étape 2 : Supposons que ξ^0 viole (5.14). On va suivre la même démarche de l'étape 1. Comme ξ^0 satisfait

$$(\xi_{11}^0 + 1)(\xi_{22}^0 + 1) < a_{12}^2\,,$$

ceci implique que $\xi_{11}^0, \xi_{22}^0 < 0$ grâce au lemme précédent. On va chercher une matrice B telle que, selon les notations précédentes, la fonction rang un convexe $f(\xi) = G(\xi - B) = F(-\xi + B)$ satisfasse

$$f(X) = 0 \text{ sur } E \tag{5.30}$$

et

$$f(\xi^0) > 0. \tag{5.31}$$

On choisi $b_{12} = 0$. On a que $f(X) = 0$ sur E si

$$b_{ii} \le 0, i = 1, 2, \text{ et } (1 + b_{11})(\pm 1 - b_{22}) \ge -a_{12}^2$$

(en fait ces conditions impliquent respectivement que les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 - b_{11} & \pm a_{12} \\ \pm a_{12} & \pm 1 - b_{22} \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} -1 - b_{11} & \pm a_{12} \\ \pm a_{12} & \pm 1 - b_{22} \end{pmatrix}$$

satisfont $M_{11} + M_{22} > 0$ et $\det N \le 0$) et donc $f(X) = 0$ si $X \in E$ grâce à la remarque 5.2.7. D'ailleurs $f(\xi^0) > 0$ si

$$\begin{cases} \xi_{11} - \dfrac{\xi_{12}}{\alpha_2}\alpha_1 - b_{11} < 0 \\ \xi_{22} - \dfrac{\xi_{12}}{\alpha_1}\alpha_2 - b_{22} < 0\,. \end{cases}$$

On va donc étudier le système suivant :

$$\begin{cases} 0 > b_{ii}, i = 1,2 \\ (1+b_{11})(\pm 1 - b_{22}) > -a_{12}^2 \\ \xi_{11} - \dfrac{\xi_{12}}{\alpha_2}\alpha_1 - b_{11} < 0 \\ \xi_{22} - \dfrac{\xi_{12}}{\alpha_1}\alpha_2 - b_{22} < 0\,. \end{cases}$$

On trouve b_{11}, b_{22} comme dans l'étape précédente.

Les étapes 1) et 2) montrent que ξ^0 appartient à $\mathcal{A}$. Or, soit X un élément du segment $t\xi + (1-t)(\xi+\lambda)$: si $X_{12} > 0$, il existe $s \in (0,1)$ tel que $X = s\xi^0 + (1-s)(\xi+\lambda)$, et donc X appartient à $\mathcal{A}$ parce que $(\xi^0)_{12}(\xi+\lambda)_{12} \geq 0$ (cas 1). Si $X_{12} < 0$ il existe $r \in (0,1)$ tel que $X = r\xi^0 + (1-r)\xi$, et donc X appartient à $\mathcal{A}$ également.

On a alors montré que $\mathcal{A}$ est rang un convexe.

$\square$

5.3 Théorème d'existence

Dans cette section nous allons démontrer le théorème 5.1.1. Pour ceci nous allons étudier si E et Rco$E$ ont la propriété d'approximation : comme notre ensemble E est compact, il suffira alors d'appliquer le théorème 3.4.4 pour obtenir notre résultat.

5.3.1 Propriété d'approximation

Nous allons vérifier si E et $K(E) = \text{Rco}E$ ont la propriété d'approximation (voir définition 3.4.1 ; on rappelle que ceci est important pour pouvoir utiliser le théorème d'existence 3.4.4). Ce résultat est nouveau. Nous allons montrer que si $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \leq 0$ alors E et Rco$E$ n'ont pas la propriété d'approximation, tandis qu'ils l'ont dans le cas $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.
Dans les démonstrations on utilisera le résultat suivant :

Lemme 5.3.1. *Soit* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$. *Si* $\xi \in \text{int Rco}E$ *alors* ξ *satisfait (5.2), (5.3), (5.4), (5.5) et (5.6) avec des inégalités strictes .*

Démonstration. Soit $\xi \in \text{int Rco}E$. Supposons par l'absurde que ξ satisfasse une égalité parmi (5.2), (5.3), (5.4), (5.5), (5.6). Sûrement ξ ne peut pas satisfaire une des (5.2) comme égalité : en fait supposons par exemple que $\xi_{12} = a_{12}$. Alors pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit

$$\eta = \xi + \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \in \text{Rco}E :$$

ceci est absurde parce que $\eta_{12} > a_{12}$.

D'ailleurs, ξ ne peut pas satisfaire (5.3), (5.4), (5.5), (5.6) avec égalité. En fait par exemple supposons que $\xi_{12} > 0$ et $f(\xi) = (\xi_{11}-a_{11})(\xi_{22}-a_{22})-(\xi_{12}-a_{12})^2$. Si on prend

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on aura qu'il existe $t_0 > 0$ tel que, $f(\xi + t\lambda) \leq 0 \; \forall \; t \in [-t_0, t_0]$ par définition d'intérieur. Posons $h(t) = f_i(\xi + t\lambda)$; h est convexe, et $h(0) = 0$ et $h(t_0) \leq 0$ et $h(-t_0) \leq 0$. Ceci implique que $h(t) = 0$ pour tout t dans un intervalle de $\mathbb{R}$, c'est à dire $t(\xi_{22} - a_{22}) = 0$ (comme $f(\xi) = 0$) pour tout t dans un intervalle de $\mathbb{R}$ et donc $\xi_{22} = a_{22}$, ce qui est absurde.

□

Propriété d'approximation dans le cas $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \leq 0$:

Théorème 5.3.2. *Si $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ alors E et $\mathrm{Rco}E$ n'ont pas la propriété d'approximation.*

Démonstration. Si $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ alors $\mathrm{intRco}E$ est vide et donc la première condition de la propriété d'approximation n'est pas vérifiée. □

Remarque 5.3.3. *On va maintenant analyser le cas $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$. On a roussi à montrer que E et $\mathrm{Rco}\,E$ n'ont pas la propriété d'approximation avec $K(E_\delta) = \mathrm{Rco}E_\delta$, si E_δ est de la forme*

$$E_\delta = \left\{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : |\xi_{ij}| = f_{ij}(\delta), i, j = 1, 2\right\}, \delta \in [0, \bar{\delta}] \tag{5.32}$$

pour certaines fonctions continues $f_{ij} : (0, \bar{\delta}) \to \mathbb{R}^+$ telles que $f_{12} = f_{21}$ et $\lim_{\delta \to 0} f_{ij}(\delta) = a_{ij}$.

En fait, on pose $detA_\delta := f_{11}(\delta)f_{22}(\delta) - [f_{12}(\delta)]^2$; on va étudier deux cas : $detA_\delta \geq 0$ et $detA_\delta < 0$.

Dans le premier cas, supposons que 0 soit un point d'accumulation pour l'ensemble $\{\delta \in [0, \bar{\delta}] : \det A_\delta \geq 0\}$ (sinon, il n'y a rien à étudier). On remarque facilement que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Rco}E_\delta$, mais elle n'est pas dans $\mathrm{intRco}E$.

Si $detA_\delta < 0$, supposons que 0 soit un point d'accumulation pour l'ensemble $\{\delta \in [0, \bar{\delta}] : \det A_\delta < 0\}$ (sinon, il n'y a rien à étudier). Pour l'étude de ce cas les observations suivantes sont utiles. Sûrement on peut dire que $|f_{12}(\delta)| < 2a_{12}$ pour tout $\delta \in (0, \delta_0(a_{12}))$, comme $\lim_{\delta \to 0} f_{12}(\delta) = a_{12}$.

Grâce à ces observations, nous allons montrer que la troisième condition de la propriété d'approximation est violée. On choisit, pour un certain $\delta_1 \in (0, \delta_0(a_{12}))$ la matrice

$$\bar{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{2} + \frac{f_{12}(\delta_1)}{4} \\ \frac{a_{12}}{2} + \frac{f_{12}(\delta_1)}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

On a que $\bar{\eta} \in \mathrm{intRco}E$, parce que $0 < \frac{a_{12}}{2} + \frac{f_{12}(\delta_1)}{4} < a_{12}$. D'ailleurs supposons par l'absurde que $\bar{\eta} \in \mathrm{Rco}E_\delta$ pour tout δ suffisamment petit. Comme

$$\mathrm{Rco}E_\delta = \{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : |\xi_{11}| \leq f_{11}(\delta), |\xi_{22}| \leq f_{22}(\delta), |\xi_{12}| = f_{12}(\delta)\},$$

ceci impliquerait que

$$\frac{a_{12}}{2} + \frac{f_{12}(\delta_1)}{4} = f_{12}(\delta)$$

pour tout δ suffisamment petit. En passant à la limite pour $\delta \to 0$ on aurait

$$\frac{a_{12}}{2} + \frac{f_{12}(\delta_1)}{4} = a_{12},$$

ce qui est absurde par le choix de δ_1.

Propriété d'approximation dans le cas $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$:

On va montrer que E et Rco$E$ ont la propriété d'approximation. Comme on a vu dans la section précédente on peut supposer que $a_{11} = a_{22} = 1$. Alors il suffit de montrer le théorème suivant.

Théorème 5.3.4. *Si* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ *alors* E *et* Rco$E$ *ont la propriété d'approximation avec* $K(E_\delta) = \mathrm{Rco}E_\delta$ *si, pour* δ *suffisamment petit*

$$E_\delta = \left\{ \xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : |\xi_{ii}| = 1 - \delta,\ i = 1, 2,\ |\xi_{12}| = a_{12} - \frac{\delta^2}{2} \right\}.$$

Démonstration. On observe que pour nôtre E_δ

$$(1-\delta)^2 - \left(a_{12} - \frac{\delta^2}{2}\right)^2 \geq 0;$$

en fait il suffit de poser $F(\delta) = (1-\delta)^2 - (a_{12} - \frac{\delta^2}{2})^2$. F est une fonction continue, et $F(0) = 1 - a_{12}^2 > 0$; par le théorème de la permanence du signe il existe δ_0 tel que $F(\delta) \geq 0\ \forall\ \delta < \delta_0$.

Puisque $(1-\delta)^2 - \left(a_{12} - \frac{\delta^2}{2}\right) \geq 0$, on peut utiliser le théorème 5.1.2 pour écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{Rco}E_\delta = \{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : &|\xi_{ii}| \leq 1 - \delta, i = 1, 2, |\xi_{12}| \leq a_{12} - \tfrac{\delta^2}{2}, \\ &(\xi_{11} - 1 + \delta)(\xi_{22} + 1 - \delta) \leq \xi_{12}^2 - (a_{12} - \tfrac{\delta^2}{2})^2 \\ &(\xi_{11} + 1 - \delta)(\xi_{22} - 1 + \delta) \leq \xi_{12}^2 - (a_{12} - \tfrac{\delta^2}{2})^2 \\ &(\xi_{11} - 1 + \delta)(\xi_{22} - 1 + \delta) \geq (|\xi_{12}| - a_{12} + \tfrac{\delta^2}{2})^2 \\ &(\xi_{11} + 1 - \delta)(\xi_{22} + 1 - \delta) \geq (|\xi_{12}| - a_{12} + \tfrac{\delta^2}{2})^2\}. \end{aligned}$$

Maintenant nous allons vérifier les trois conditions de la propriété d'approximation :

1)Rco(E_δ) $\subset$ intRco$E$: Soit $\xi \in \mathrm{Rco}E_\delta$. Grâce au lemme précédent il faut montrer que

$$|\xi_{11}| < 1, |\xi_{22}| < 1, |\xi_{12}| < a_{12} \tag{5.33}$$
$$(\xi_{11} - 1)(\xi_{22} + 1) < \xi_{12}^2 - a_{12}^2 \tag{5.34}$$
$$(\xi_{11} + 1)(\xi_{22} - 1) < \xi_{12}^2 - a_{12}^2 \tag{5.35}$$
$$(\xi_{11} - 1)(\xi_{22} - 1) > (|\xi_{12}| - a_{12})^2 \tag{5.36}$$
$$(\xi_{11} + 1)(\xi_{22} + 1) > (|\xi_{12}| - a_{12})^2. \tag{5.37}$$

On va diviser l'étude en plusieurs cas.
étape 1 : On a $|\xi_{ii}| \leq 1 - \delta < 1$, $i = 1, 2$ et $|\xi_{12}| \leq a_{12} - \frac{\delta^2}{2} < a_{12}$. On a donc montré (5.33).
étape 2 : On veut montrer (5.34), c'est à dire

$$(\xi_{11} - 1)(\xi_{22} + 1) - \xi_{12}^2 + a_{12}^2 < 0.$$

On sait que ξ satisfait

$$(\xi_{11} - 1 + \delta)(\xi_{22} + 1 - \delta) \leq \xi_{12}^2 - \left(a_{12} - \frac{\delta^2}{2}\right)^2 \ \forall\ \delta \geq 0,$$

c'est à dire

$$(\xi_{11}-1)(\xi_{22}+1)-\xi_{12}^2+a_{12}^2 \leq \delta^2(1+a_{12})+\delta(\xi_{11}-1)-\delta(\xi_{22}+1)-\frac{\delta^4}{4};$$

alors il suffit de montrer que le membre de droite de l'inégalité précédente est négatif, c'est à dire

$$-2+\xi_{11}-\xi_{22}+\delta(1+a_{12})-\frac{\delta^3}{4}<0;$$

comme $1+\xi_{22}>\delta$ et $1-\xi_{11}>\delta$, il suffit de vérifier que $a_{12}-1-\frac{\delta^2}{4}<0$. Ceci est une relation vraie pour δ suffisamment petit grâce au théorème de la permanence du signe appliqué à la fonction $g(\delta)=a_{12}-1-\frac{\delta^2}{4}$.
étape 3 : On veut montrer (5.35), c'est à dire

$$(\xi_{11}+1)(\xi_{22}-1)-\xi_{12}^2+a_{12}^2<0.$$

On sait que

$$(\xi_{11}+1-\delta)(\xi_{22}-1+\delta) \leq \xi_{12}^2-\left(a_{12}-\frac{\delta^2}{2}\right)^2, \forall\ \delta \geq 0$$

c'est à dire

$$(\xi_{11}+1)(\xi_{22}-1)-\xi_{12}^2+a_{12}^2 \leq -\delta(\xi_{11}+1)+\delta(\xi_{22}-1)+\delta^2(1+a_{12})-\frac{\delta^4}{4};$$

alors il suffit de montrer que le membre de droite de l'inégalité précédente est négatif, c'est à dire

$$-2-\xi_{11}+\xi_{22}+\delta(1+a_{12})-\frac{\delta^3}{4}<0.$$

Comme $1+\xi_{11}>\delta$ et $1-\xi_{22}>\delta$, il suffit de vérifier que $a_{12}-\frac{\delta^2}{4}<1$. Ceci est une relation vraie pour δ suffisamment petit grâce au théorème de la permanence du signe appliqué à la fonction $g(\delta)=a_{12}-1-\frac{\delta^2}{4}$.
étape 4 : On veut montrer (5.36), c'est à dire

$$(\xi_{11}-1)(\xi_{22}-1)-(|\xi_{12}|-a_{12})^2>0.$$

On sait que

$$(\xi_{11}-1+\delta)(\xi_{22}-1+\delta) \geq \left(|\xi_{12}|-a_{12}+\frac{\delta^2}{2}\right)^2, \forall\ \delta \geq 0$$

c'est à dire

$$(\xi_{11}-1)(\xi_{22}-1)-(|\xi_{12}|-a_{12})^2 \geq \delta(1-\xi_{11}+1-\xi_{22})+\delta^2(|\xi_{12}|-a_{12}-1)+\frac{\delta^4}{4};$$

alors il suffit de montrer que le membre de droite de l'inégalité précédente est positif, c'est à dire

$$1-\xi_{11}+1-\xi_{22}+\frac{\delta^3}{4}+\delta(|\xi_{12}|-a_{12}-1)>0;$$

comme $1-\xi_{11}>\delta$, $1-\xi_{22}>\delta$ et $|\xi_{12}|-a_{12}>-a_{12}$, il suffit de vérifier que $\delta(1-a_{12})+\frac{\delta^3}{4}>0$. Ceci est une relation vraie pour le théorème de la permanence du signe appliqué à la fonction $h(\delta)=1-a_{12}+\frac{\delta^2}{4}$ continue.
étape 5 : On veut montrer (5.37), c'est à dire

$$(\xi_{11}+1)(\xi_{22}+1)-(|\xi_{12}|-a_{12})^2>0:$$

On sait que

$$(\xi_{11}+1-\delta)(\xi_{22}+1-\delta)\geq\left(|\xi_{12}|-a_{12}+\frac{\delta^2}{2}\right)^2,\forall\ \delta\geq 0$$

c'est à dire

$$(\xi_{11}+1)(\xi_{22}+1)-(|\xi_{12}|-a_{12})^2\geq\delta(1+\xi_{11}+1+\xi_{22})+\delta^2(|\xi_{12}|-a_{12}-1)+\frac{\delta^4}{4};$$

alors il suffit de montrer que le membre de droite de l'inégalité précédente est positif, c'est à dire

$$1+\xi_{11}+1+\xi_{22}+\delta(|\xi_{12}|-a_{12}-1)+\frac{\delta^3}{4}>0;$$

comme $1+\xi_{11}>\delta$, $1+\xi_{22}>\delta$ et $|\xi_{12}|-a_{12}>-a_{12}$, il suffit de vérifier que $\delta(1-a_{12})+\frac{\delta^3}{4}>0$. Ceci est une relation vraie pour le théorème de la permanence du signe appliqué à la fonction $h(\delta)=1-a_{12}+\frac{\delta^2}{4}$ continue.

2)$\forall\ \varepsilon>0\,\exists\,\delta_0=\delta_0(\varepsilon)>0$: $\mathrm{dist}(\eta,E)\leq\varepsilon\ \forall\ \eta\in E_\delta,\delta\in[0,\delta_0]$: Soit $\eta\in E_\delta$. Alors il existe une matrice $H(\delta)$ telle que $\eta+H(\delta)\in E$ et $|H(\delta)_{11}|=\delta$, $|H(\delta)_{22}|=\delta$, $|H(\delta)_{12}|=\delta^2/2$. On note que

$$\mathrm{dist}(\eta,E)\leq\mathrm{dist}(\eta,\eta+H(\delta))\leq\sqrt{\delta^2+\delta^2+2\left(\frac{\delta^2}{2}\right)^2}\ \forall\ \eta\in E_\delta,$$

comme $\eta+H(\delta)\in E$. On fixe $\varepsilon>0$; alors il existe $\delta_0(\varepsilon)$ tel que

$$\mathrm{dist}(\eta,E)\leq\sqrt{2\delta^2+2\left(\frac{\delta^2}{2}\right)^2}<\varepsilon\,\forall\ \eta\in E_\delta$$

pour $\delta<\delta_0(\varepsilon)$, parce que la fonction $f(\delta)=\sqrt{2\delta^2+\frac{\delta^4}{2}}$ est continue.

3)si $\eta\in\mathrm{intRco}E$ alors $\eta\in\mathrm{Rco}E_\delta\ \forall\ \delta>0$ suffisamment petit : On fixe $\eta\in\mathrm{intRco}E$. On va diviser la démonstration en plusieurs étapes pour montrer les diverses inégalités qui définissent $\mathrm{Rco}E_\delta$:
étape 1 : On veux montrer que

$$|\eta_{ii}|\leq 1-\delta,i=1,2\text{ et }|\eta_{12}|\leq a_{12}-\frac{\delta^2}{2}.$$

On sait que $|\eta_{ii}|<1,i=1,2$: ceci implique que $|\eta_{ii}|\leq 1-\delta,i=1,2$, si on prend $\delta\leq\min\{1-|\eta_{11}|,1-|\eta_{22}|\}$. D'ailleurs, en choisissant $\delta\leq\sqrt{2(a_{12}-|\eta_{12}|)}$, on a que $|\eta_{12}|\leq a_{12}-\frac{\delta^2}{2}$.

étape 2 : On veut montrer que

$$\eta_{12}^2 - \left(a_{12} - \frac{\delta^2}{2}\right)^2 - (\eta_{11} - 1 + \delta)(\eta_{22} + 1 - \delta) \geq 0$$

pour δ suffisamment petit, c'est à dire on veut montrer que

$$f_1(\delta) := \eta_{12}^2 - \left(a_{12} - \frac{\delta^2}{2}\right)^2 - (\eta_{11} - 1 + \delta)(\eta_{22} + 1 - \delta) \geq 0$$

pour δ suffisamment petit. On sait que $(\eta_{11} - 1)(\eta_{22} + 1) < |\eta_{12}|^2 - a_{12}^2$, c'est à dire $f_1(0) > 0$; puisque f_1 est une fonction continue, alors, grâce au théorème de la permanence du signe, il existe $\delta_1(\eta_{ij}) > 0$ tel que $f_1(\delta) \geq 0 \ \forall \ \delta \leq \delta_1(\eta_{ij})$.
étape 3 : On veut montrer que

$$f_2(\delta) := \eta_{12}^2 - \left(a_{12} - \frac{\delta^2}{2}\right)^2 - (\eta_{11} + 1 - \delta)(\eta_{22} - 1 + \delta) \geq 0$$

pour δ suffisamment petit, c'est à dire on veut montrer que

$$f_2(\delta) := \eta_{12}^2 - \left(a_{12} - \frac{\delta^2}{2}\right)^2 - (\eta_{11} + 1 - \delta)(\eta_{22} - 1 + \delta) \geq 0$$

pour δ suffisamment petit. On sait que $(\eta_{11} + 1)(\eta_{22} - 1) < |\eta_{12}|^2 - a_{12}^2$, c'est à dire $f_2(0) > 0$; puisque f_2 est une fonction continue, alors, grâce au théorème de la permanence du signe, il existe $\delta_2(\eta_{ij}) > 0$ tel que $f_2(\delta) \geq 0 \ \forall \ \delta \leq \delta_2(\eta_{ij})$.
étape 4 : On veut montrer que

$$(\eta_{11} - 1 + \delta)(\eta_{22} - 1 + \delta) - \left(|\eta_{12}| - a_{12} + \frac{\delta^2}{2}\right)^2 \geq 0$$

pour δ suffisamment petit, c'est à dire on veut montrer que

$$f_3(\delta) := (\eta_{11} - 1 + \delta)(\eta_{22} - 1 + \delta) - \left(|\eta_{12}| - a_{12} + \frac{\delta^2}{2}\right)^2 \geq 0$$

pour δ suffisamment petit. On sait que $(\eta_{11} - 1)(\eta_{22} - 1) > (|\eta_{12}| - a_{12})^2$, c'est à dire $f_3(0) > 0$; puisque f_3 est une fonction continue, alors, grâce au théorème de la permanence du signe, il existe $\delta_3(\eta_{ij}) > 0$ tel que $f_3(\delta) \geq 0 \ \forall \ \delta \leq \delta_3(\eta_{ij})$.
étape 5 : On veut montrer que

$$(\eta_{11} + 1 - \delta)(\eta_{22} + 1 - \delta) - \left(|\eta_{12}| - a_{12} + \frac{\delta^2}{2}\right)^2 \geq 0$$

pour δ suffisamment petit, c'est à dire on veut montrer que

$$f_4(\delta) := (\eta_{11} + 1 - \delta)(\eta_{22} + 1 - \delta) - \left(|\eta_{12}| - a_{12} + \frac{\delta^2}{2}\right)^2 \geq 0$$

pour δ suffisamment petit. On sait que $(\eta_{11} + 1)(\eta_{22} + 1) > (|\eta_{12}| - a_{12})^2$, c'est à dire $f_4(0) > 0$; puisque f_4 est une fonction continue, alors, grâce au théorème de la permanence du signe, il existe $\delta_4(\eta_{ij}) > 0$ tel que $f_4(\delta) \geq 0 \ \forall \ \delta \leq \delta_4(\eta_{ij})$.

En considérant

$$\delta(\eta) = \min\{1 - |\eta_{11}|, 1 - |\eta_{22}|, \sqrt{2(a_{12} - \eta_{12})}, \delta_1(\eta_{ij}), \delta_2(\eta_{ij}), \delta_3(\eta_{ij}), \delta_4(\eta_{ij})\}$$

on a que si $\eta \in \text{int Rco}E$ alors $\eta \in \text{Rco}(E_\delta) \ \forall \ \delta \in (0, \delta(\eta))$. $\square$

Remarque 5.3.5. *Si $a_{12} = 1$ alors, selon les notations de la preuve précédente, si*

$$F(\delta) = (1-\delta)^2 - \left(a_{12} - \frac{\delta^2}{2}\right)^2$$

on a $F(0) = 0$; par ailleurs $F'(\delta) = -2(1-\delta) + 2(a_{12} - \frac{\delta^2}{2})\delta$; alors $F'(0) = -2 < 0$ et donc il n'existe pas $\delta_0 > 0$ tel que $F(\delta) \geq 0, \forall\, \delta \in [0, \delta_0]$. Ceci ne nous permet pas d'écrire $RcoE_\delta$ en employant le théorème 5.1.2 et donc on ne peut pas utiliser la preuve précédente pour le cas $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$ (ceci est cohérent avec le fait que dans la section précédente on a vu que E et $RcoE$ n'ont pas la propriété d'approximation si on choisit E_δ de la forme (5.32)).

5.4 L'enveloppe polyconvexe

Dacorogna et Tanteri [15] ont calculé Pco$E$ dans le cas $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, et Dolzmann [16] l'a calculé dans les autres cas. Nous allons présenter une démonstration différente.

Dans la preuve il nous sera utile le lemme suivant :

Lemme 5.4.1. *Soit E un ensemble de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Si $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sont deux matrices telles que $detA \neq 0$ et $detB \neq 0$, alors*

$$A\,\mathrm{Pco}E\,B = \mathrm{Pco}(AEB).$$

Démonstration. On va d'abord montrer que

$$A\,\mathrm{Pco}E\,B \subseteq \mathrm{Pco}(AEB)\,.$$

Soit $\xi \in A\,\mathrm{Pco}E\,B$. Alors $\xi = A\tilde{\xi}B$, pour un certain $\tilde{\xi} \in \mathrm{Pco}E$. Par définition de Pco$E$, on a

$$(\tilde{\xi}, \det\tilde{\xi}) = \sum_{i=1}^{5} t_i(\tilde{\xi}_i, \det\tilde{\xi}_i),\ \tilde{\xi}_i \in E,\ \sum_{i=1}^{5} t_i = 1;$$

et donc

$$(A\tilde{\xi}B, \det A \det\tilde{\xi} \det B) = \sum_{i=1}^{5} t_i(A\tilde{\xi}_iB, \det A\det\tilde{\xi}_i\det B),\ \tilde{\xi}_i \in E,\ \sum_{i=1}^{5} t_i = 1;$$

c'est-à dire, grâce au théorème de Binet

$$(A\tilde{\xi}B, \det(A\tilde{\xi}B)) = \sum_{i=1}^{5} t_i(A\tilde{\xi}_iB, \det(A\tilde{\xi}_iB)),\ A\tilde{\xi}_iB \in AEB,\ \sum_{i=1}^{5} t_i = 1,$$

qui montre que $A\tilde{\xi}B = \xi \in \mathrm{Pco}(AEB)$.

Pour l'inclusion inverse, $A\mathrm{Pco}EB \supseteq \mathrm{Pco}(AEB)$, soit $\xi \in \mathrm{Pco}(AEB)$; alors

$$(\xi, \det\xi) = \sum_{i=1}^{5} t_i(\xi_i, \det\xi_i),\ \xi_i \in AEB,\ \sum_{i=1}^{5} t_i = 1.$$

Puisque $\xi_i \in AEB$ alors $\xi_i = A\bar{\xi_i}B$, pour certains $\bar{\xi_i} \in E$; donc

$$(\xi, \det\xi) = \sum_{i=1}^{5} t_i(A\bar{\xi_i}B, \det(A\bar{\xi_i}B)) = \left(A\sum_{i=1}^{5} t_i\bar{\xi_i}B, \det A\sum_{i=1}^{5} t_i\det\bar{\xi_i}\det B\right).$$

Il faut vérifiér que $\sum_{i=1}^{5} t_i\det\bar{\xi_i} \in \mathrm{Pco}E$ c'est à dire il faut vérifier que $\det \sum_{i=1}^{5} t_i\det\bar{\xi_i} = \sum_{i=1}^{5} t_i\det\bar{\xi_i}$: ceci est équivalent à montrer que

$$\det A \det \sum_{i=1}^{5} t_i\det\bar{\xi_i} \det B = \det A \sum_{i=1}^{5} t_i\det\bar{\xi_i} \det B\,,$$

c'est à dire

$$\det\left(A\sum_{i=1}^{5} t_i\det\bar{\xi_i}B\right) = \det A \sum_{i=1}^{5} t_i\det\bar{\xi_i} \det B\,,$$

ce qui est vérifié, comme le membre de gauche de cette inégalité est égal à $\det\xi$.

□

Théorème 5.4.2. *Soient* $a_{ij} > 0, i, j = 1, 2$; *alors*

$$\mathrm{Pco}E = \{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : |\xi_{ij}| \le a_{ij}, |a_{22}\xi_{11} - a_{11}\xi_{22}| \le -\det\xi + a_{11}a_{22} - a_{12}^2\}\,.$$

Démonstration. Grâce au lemme précédent pour calculer Pco$E$, on peut toujours supposer que $a_{11} = a_{22} = 1$: en fait il suffit de choisir les matrices définies par (5.8) et (5.9). Donc, après cette simplification, il faut montrer que $\mathcal{A} = \mathrm{Rco}E$, où

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : |\xi_{ii}| \le 1, i = 1, 2,\ |\xi_{12}| \le a_{12},\\ (\xi_{11} - 1)(\xi_{22} + 1) \le \xi_{12}^2 - a_{12}^2,\\ (\xi_{11} + 1)(\xi_{22} - 1) \le \xi_{12}^2 - a_{12}^2\}\,.\end{aligned}$$

On remarque toute de suite que $\mathcal{A} \supset E$ et $\mathcal{A}$ est polyconvexe, car il est défini comme intersection d'ensembles de niveau de fonctions polyconvexes (voir ensemble P défini par (5.26)) ; donc Pco$E \subseteq \mathcal{A}$.

Maintenant, pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de vérifier que $\partial\mathcal{A} \subset$ Pco$E$: ceci impliquera que $\mathcal{A} \subseteq$ Pco$E$. En fait soit $X \in \mathrm{int}\mathcal{A}$; comme $\mathcal{A}$ est compact, pour toute matrice λ de rang 1, il existe $\gamma_1 < 0 < \gamma_2$ réels tels que

$$X + \gamma_1\lambda \in \partial\mathcal{A}, \quad X + \gamma_2\lambda \in \partial\mathcal{A}.$$

Puisque $\partial\mathcal{A} \subset$ Pco$E$, (comme nous allons montrer) $X + \gamma_i\lambda \in$ Pco$E$, $i = 1, 2$. On peut écrire X sous la forme suivante :

$$X = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1}(X + \gamma_1\lambda) - \frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}(X + \gamma_2\lambda);$$

comme rang$(\lambda) = 1$, cette relation prouve que $X \in$ Rco$E \subseteq$ Pco$E$.

On va maintenant montrer que $\partial\mathcal{A} \subseteq$ Pco$E$. Soit $\xi \in \partial\mathcal{A}$; alors ξ satisfait une égalité parmi les inégalités qui définissent $\mathcal{A}$. Distinguons différents cas selon les inégalités satisfaites par ξ. Si $|\xi_{ij}| = a_{ij}$, on a déjà montré (voir proposition 5.2.3) que $\xi \in \mathrm{Rco}E$. Dans la suite on peut alors considérer $|\xi_{ii}| \neq 1$ et $|\xi_{12}| \neq a_{12}$. Nous allons maintenant traiter un cas qui sera utile pour étudier, après, les égalités

$$(\xi_{11} \pm 1)(\xi_{22} \mp 1) = \xi_{12}^2 - a_{12}^2.$$

cas 1) Supposons que ξ satisfait les deux égalités

$$(\xi_{11} - 1)(\xi_{22} + 1) = \xi_{12}^2 - a_{12}^2 \text{ et } (\xi_{11} + 1)(\xi_{22} - 1) = \xi_{12}^2 - a_{12}^2 : \tag{5.38}$$

alors $(\xi_{11} - 1)(\xi_{22} + 1) = (\xi_{11} + 1)(\xi_{22} - 1)$, ce qui implique que

$$\xi_{11} = \xi_{22} \text{ et } \xi_{12}^2 = a_{12}^2 + \xi_{11}^2 - 1.$$

Par conséquent il faut montrer que les matrices du type

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} & \pm\sqrt{a_{12}^2 + \xi_{11}^2 - 1} \\ \pm\sqrt{a_{12}^2 + \xi_{11}^2 - 1} & \xi_{11} \end{pmatrix} \in \mathrm{Pco}E. \tag{5.39}$$

On observe tout de suite qu'il suffit de montrer que les matrices

$$M = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \sqrt{a_{12}^2 + \xi_{11}^2 - 1} \\ \sqrt{a_{12}^2 + \xi_{11}^2 - 1} & \xi_{11} \end{pmatrix}$$

appartiennent à $\mathrm{Pco}E$ pour tout $\xi_{11} \in (-1, 1)$. En fait E est un ensemble de matrices tel que $\pm A \in E$ pour toute $A \in E$. Comme $E \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$, ceci implique que $\pm\xi \in \mathrm{Pco}E$, pour toute $\xi \in \mathrm{Pco}E$.

On va montrer (5.39) en étudiant les trois cas $a_{12} < 1$, $a_{12} > 1$ et $a_{12} = 1$ séparément.

$a_{12} < 1$:

Observons que dans ce cas $\xi_{11} \neq 0$: en fait si $\xi_{11} = 0$ et $a_{12} < 1$ alors $a_{12}^2 + \xi_{22}^2 - 1 < 0$ et donc ξ ne peut pas satisfaire (5.38), comme on a vu avant. Nous allons traiter séparément les cas $\xi_{11} > 0$ et $\xi_{11} < 0$.

• Supposons que $\xi_{11} > 0$. Il faut chercher, par définition de $\mathrm{Pco}E$, $t_1, t_2, t_3 \geq 0$ tels que

$$\begin{cases} M = t_1 \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{12} & 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 & -a_{12} \\ -a_{12} & -1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 & -a_{12} \\ -a_{12} & 1 \end{pmatrix} \\ \det M = (t_1 + t_2 + t_3)(1 - a_{12}^2) \\ t_1 + t_2 + t_3 = 1. \end{cases}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} \xi_{11} = t_1 - t_2 + t_3 \\ \dfrac{\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1}}{a_{12}} = t_1 - t_2 - t_3 \\ t_1 + t_2 + t_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t_3 = \dfrac{\xi_{11}}{2} - \dfrac{\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1}}{2a_{12}} \\ t_1 + t_3 = \xi_{11} + t_2 \\ t_1 + t_3 = 1 - t_2 \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} t_3 = \dfrac{\xi_{11}}{2} - \dfrac{\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1}}{2a_{12}} \\ t_2 = \dfrac{1 - \xi_{11}}{2} \\ t_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1}}{2a_{12}}. \end{cases}$$

Or, pour terminer ce cas, il faut vérifier que $t_1, t_2, t_3 \in [0,1]$:

t_1 : Sûrement $t_1 > 0$, parce qu'il est somme de deux termes positifs ; $t_1 < 1$ si et seulement si $a_{12} + \sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1} < 2a_{12}$ qui est vrai, parce que ceci est équivalent à $|\xi_{11}| < 1$.

t_2 : On voit tout de suite que $t_2 \in (0,1)$ parce que $\xi_{11} \in (0,1)$.

t_3 : $t_3 > 0$ si et seulement si $\xi_{11}a_{12} > \sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1}$; en élevant au carré on a $\xi_{11}^2(1 - a_{12}^2) < 1 - a_{12}^2$, qui est une relation vraie, puisque $a_{12}^2 < 1$ et $|\xi_{11}| < 1$. D'ailleurs $t_3 < 1$ si et seulement si $a_{12}\xi_{11} - \sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1} < 2a_{12}$ qui est équivalent à $-\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1} < a_{12}(2 - \xi_{11})$, qui est banalement satisfaite comme les deux membres ont signe contraire. Donc M, avec $\xi_{11} > 0$ appartient à Pco$E$.

• Maintenant supposons que $\xi_{11} < 0$. Comme dans le cas précédent, il faut chercher $t_1, t_2, t_3 \geq 0$ tels que

$$\begin{cases} M = t_1 \begin{pmatrix} -1 & a_{12} \\ a_{12} & -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 & -a_{12} \\ -a_{12} & -1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 & -a_{12} \\ -a_{12} & 1 \end{pmatrix} \\ \det M = (t_1 + t_2 + t_3)(1 - a_{12}^2) \\ t_1 + t_2 + t_3 = 1. \end{cases}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} \xi_{11} = -t_1 - t_2 + t_3 \\ \dfrac{\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1}}{a_{12}} = t_1 - t_2 - t_3 \\ t_1 + t_2 + t_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t_2 = -\dfrac{\xi_{11}}{2} - \dfrac{\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1}}{2a_{12}} \\ t_1 + t_2 = -\xi_{11} + t_3 \\ t_1 + t_2 = 1 - t_3 \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} t_2 = -\dfrac{\xi_{11}}{2} - \dfrac{\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1}}{2a_{12}} \\ t_3 = \dfrac{1 + \xi_{11}}{2} \\ t_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1}}{2a_{12}}. \end{cases}$$

Pour terminer la preuve il faut vérifier que $t_1, t_2, t_3 \in [0,1]$.

t_1 : Sûrement $t_1 > 0$, parce qu'il est somme de deux termes positifs ; $t_1 < 1$ si et seulement si $\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1} < a_{12}$: en élevant au carré, on obtient $\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1 < a_{12}^2$, qui est vrai.

t_2 : $t_2 > 0$ si et seulement si $\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1} < -\xi_{11}a_{12}$; comme $\xi_{11} < 0$, en élevant au carré on a $\xi_{11}^2(1 - a_{12}^2) < 1 - a_{12}^2$, qui est une relation vraie, puisque $a_{12}^2 < 1$ et $|\xi_{11}| < 1$. Par ailleurs $t_2 < 1$ si et seulement si $-\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1} < a_{12}(2+\xi_{11})$, qui est banalement vrai comme les deux membres ont signe contraire.

t_3 : On voit tout de suite que $t_3 \in (0,1)$ parce que $0 < |\xi_{11}| < 1$.

On a alors que, si $a_{12} < 1$, $M \in$ Pco$E$.

$a_{12} > 1$:

Il faut chercher $t_1, t_2, t_3 \geq 0$ tels que

$$\begin{cases} M = t_1 \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{12} & 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 & a_{12} \\ a_{12} & -1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 & -a_{12} \\ -a_{12} & -1 \end{pmatrix} \\ \det M = (t_1 + t_2 + t_3)(1 - a_{12}^2) \Leftrightarrow 1 - a_{12}^2 = (t_1 + t_2 + t_3)(1 - a_{12}^2) \\ t_1 + t_2 + t_3 = 1. \end{cases}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} \xi_{11} = t_1 - t_2 - t_3 \\ \dfrac{\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1}}{a_{12}} = t_1 + t_2 - t_3 \\ t_1 + t_2 + t_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t_2 = -\dfrac{\xi_{11}}{2} + \dfrac{\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1}}{2a_{12}} \\ t_3 + t_2 = 1 - t_1 \\ t_3 + t_2 = t_1 - \xi_{11} \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} t_2 = -\dfrac{\xi_{11}}{2} + \dfrac{\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1}}{2a_{12}} \\ t_1 = \dfrac{1 + \xi_{11}}{2} \\ t_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1}}{2a_{12}}. \end{cases}$$

Maintenant il faut vérifier que $t_1, t_2, t_3 \in [0, 1]$.
t_1 : On voit tout de suite que $t_1 \in (0, 1)$ parce que $\xi_{11} \in (-1, 1)$.
t_2 : $t_2 > 0$ si et seulement si $\xi_{11} a_{12} < \sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1}$; sûrement cette inégalité est vraie si $\xi_{11} \leq 0$. Si $\xi_{11} > 0$, en élevant au carré, on obtient $\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1 > a_{12}^2 \xi_{11}^2$, qui est vrai, parce qu'il est équivalent à $a_{12}^2 - 1 > \xi_{11}^2(a_{12}^2 - 1)$ et $|\xi_{11}| < 1$. Par ailleurs $t_2 < 1$ si et seulement si $\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1} < a_{12}(2 + \xi_{11})$; en élevant au carré on a

$$\xi_{11}^2(a_{12}^2 - 1) + 4a_{12}^2 \xi_{11} + 1 + 3a_{12}^2 > 0.$$

On étudie le signe du discriminant : $\frac{\Delta}{4} = 4a_{12}^4 - (1 + 3a_{12}^2)(a_{12}^2 - 1) = a_{12}^4 + 1 + 2a_{12}^2 = (a_{12}^2 + 1)^2$, qui est positif. On peut alors calculer la solution de l'inégalité :

$$\xi_{11} > -1 \cup \xi_{11} < \frac{-3a_{12}^2 - 1}{a_{12}^2 - 1} :$$

la première relation implique que $t_2 < 1$.
t_3 : Sûrement $t_3 < 1$; $t_3 > 0$ si et seulement si $\sqrt{\xi_{11}^2 + a_{12}^2 - 1} < a_{12}$ qui est vrai, car il suffit d'élever au carré.

Donc aussi dans le cas $a_{12} > 1$, $M \in \mathrm{Pco}E$.

$a_{12} = 1$:

On va étudier la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{11} \\ \xi_{11} & \xi_{11} \end{pmatrix}$$

avec $\xi_{11} \geq 0$. Il suffit d'étudier ce cas, comme Pco E est un ensemble symétrique. On trouve $t_1, t_2 \in [0,1]$ tels que

$$\begin{cases} M = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ t_1 + t_2 = 1\,. \end{cases}$$

En fait ceci est équivalent à

$$\begin{cases} \xi_{11} = t_1 - t_2 \\ t_2 + t_1 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{1+\xi_{11}}{2} \\ t_2 = \dfrac{1-\xi_{11}}{2}. \end{cases}$$

On voit tout de suite que $t_1, t_2 \in (0,1)$ et donc $M \in \mathrm{Pco}E$.

Par conséquent $M \in \mathrm{Pco}E$ dans tous les cas.

cas 2) Supposons que $\xi \in \partial\mathcal{A}$ satisfait

$$(\xi_{11}+1)(\xi_{22}-1) - \xi_{12}^2 + a_{12}^2 = 0.$$

On peut supposer que

$$(\xi_{11}-1)(\xi_{22}+1) - \xi_{12}^2 + a_{12}^2 < 0.$$

En suivant le même raisonnement que dans l'étape 5 de la proposition 5.2.3 on définit

$$V_1 = \{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : (\xi_{11}+1)(\xi_{22}-1) - \xi_{12}^2 + a_{12}^2 = 0\}\,.$$

On a vu qu'il existe une matrice A de rang un telle que $\xi + tA \in V_1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $\xi \in$ rel int$(\partial\mathcal{A} \cap V_1)$, et $\partial\mathcal{A} \cap V_1$ est compact, alors il existe $t_1 < 0 < t_2$ tels que $\xi + t_iA \in \partial(\partial\mathcal{A} \cap V_1)$. D'ailleurs $\xi + t_iA \in \partial(\partial\mathcal{A} \cap V_1)$ si et seulement si

$$|(\xi+t_iA)_{lj}| = a_{lj}, l, j = 1,2\,, \quad [(\xi+t_iA)_{11}-1][(\xi+t_iA)_{22}+1] - (\xi+t_iA)_{12}^2 + a_{12}^2 = 0$$

ou

$$\begin{cases} [(\xi+t_iA)_{11}-1]\,[(\xi+t_iA)_{22}+1] - (\xi+t_iA)_{12}^2 + a_{12}^2 = 0 \\ [(\xi+t_iA)_{11}+1]\,[(\xi+t_iA)_{22}-1] - (\xi+t_iA)_{12}^2 + a_{12}^2 = 0\,. \end{cases}$$

Dans les cas 1), 2) on a déjà montré que $\xi + t_iA \in \mathrm{Pco}E$. Par conséquent $\xi \in \mathrm{Pco}E$.

cas 3) Supposons que $\xi \in \partial\mathcal{A}$ satisfait

$$(\xi_{11}-1)(\xi_{22}+) - \xi_{12}^2 + a_{12}^2 = 0.$$

On suit la même démarche du cas 2). □

Bibliographie

[1] G.E. Andrews, R. Askey, and R. Roy. *Special functions*, volume 71 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[2] G. Aubert. On a counterexample of a rank 1 convex function which is not polyconvex in the case $N = 2$. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 106(3-4) :237–240, 1987.

[3] M. Belloni and B. Kawohl. A symmetry problem related to Wirtinger's and Poincaré's inequality. *J. Differential Equations*, 156(1) :211–218, 1999.

[4] R. Bhatia. *Matrix analysis*, volume 169 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997.

[5] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[6] A.P. Buslaev, V.A. Kondrat′ev, and A. I. Nazarov. On a family of extremal problems and related properties of an integral. *Mat. Zametki*, 64(6) :830–838, 1998.

[7] P. Cardaliaguet and R. Tahraoui. Equivalence between rank-one convexity and polyconvexity for isotropic sets of $\mathbb{R}^{2\times 2}$. I. *Nonlinear Anal.*, 50(8, Ser. A : Theory Methods) :1179–1199, 2002.

[8] B. Dacorogna. *Direct methods in the calculus of variations*, volume 78 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[9] B. Dacorogna. *Introduction au calcul des variations*, volume 3 of *Cahiers Mathématiques de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne [Mathematical Papers of the École Polytechnique Fédérale de Lausanne]*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1992.

[10] B. Dacorogna, W. Gangbo, and N. Subía. Sur une généralisation de l'inégalité de Wirtinger. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 9(1) :29–50, 1992.

[11] B. Dacorogna and P. Marcellini. A counterexample in the vectorial calculus of variations. In *Material instabilities in continuum mechanics (Edinburgh, 1985–1986)*, Oxford Sci. Publ., pages 77–83. Oxford Univ. Press, New York, 1988.

[12] B. Dacorogna and P. Marcellini. *Implicit partial differential equations*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 37. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999.

[13] B. Dacorogna and C.-E. Pfister. Wulff theorem and best constant in Sobolev inequality. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 71(2) :97–118, 1992.

[14] B. Dacorogna and G. Pisante. General existence theorem for differential inclusions. *Abstract and Applied Analysis, à paraître.*

[15] B. Dacorogna and C. Tanteri. Implicit partial differential equations and the constraints of nonlinear elasticity. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 81(4) :311–341, 2002.

[16] G. Dolzmann. Quasiconvex hulls in symmetric matrices. *preprint.*

[17] Y. Egorov and V. Kondratiev. *On spectral theory of elliptic operators*, volume 89 of *Operator Theory : Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.

[18] M. Gromov. *Partial differential relations*, volume 9 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[19] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990. Corrected reprint of the 1985 original.

[20] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Topics in matrix analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[21] J. Jost. *Postmodern analysis.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[22] B. Kawohl. Symmetry results for functions yielding best constants in Sobolev-type inequalities. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 6(3) :683–690, 2000.

[23] J. Kolář. Non-compact lamination convex hulls. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 20(3) :391–403, 2003.

[24] P. Lindqvist. Note on a nonlinear eigenvalue problem. *Rocky Mountain J. Math.*, 23(1) :281–288, 1993.

[25] R. Manásevich and J. Mawhin. The spectrum of p-Laplacian systems with various boundary conditions and applications. *Adv. Differential Equations*, 5(10-12) :1289–1318, 2000.

[26] S. Müller. Variational models for microstructure and phase transitions. In *Calculus of variations and geometric evolution problems (Cetraro, 1996)*, volume 1713 of *Lecture Notes in Math.*, pages 85–210. Springer, Berlin, 1999.

[27] S. Müller and V. Šverák. Convex integration for Lipschitz mappings and counterexamples to regularity. *Ann. of Math. (2)*, 157(3) :715–742, 2003.

[28] A.I. Nazarov. On exact constant in the generalized Poincaré inequality. *J. Math. Sci. (New York)*, 112(1) :4029–4047, 2002. Function theory and applications.

[29] M. Ôtani. A remark on certain nonlinear elliptic equations. *Proc. Fac. Sci. Tokai Univ.*, 19 :23–28, 1984.

[30] R.T. Rockafellar. *Convex analysis.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Reprint of the 1970 original, Princeton Paperbacks.

[31] V. Šverák. Examples of rank-one convex functions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 114(3-4) :237–242, 1990.

[32] V. Šverák. New examples of quasiconvex functions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 119(4) :293–300, 1992.

[33] V. Šverák. Rank-one convexity does not imply quasiconvexity. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 120(1-2) :185–189, 1992.

[34] M. Šilhavý. An $\mathcal{O}(n)$ invariant rang 1 convex function that is not polyconvex. *preprint*.

[35] E.T. Whittaker and G.N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions ; with an account of the principal transcendental functions, Reprint of the fourth (1927) edition.

Curriculum Vitae

Née le 15 mars 1978 à Rome (Italie), j'ai obtenu la maturité scientifique auprès du Lycée Scientifique Talete de Rome (note : 60/60).

En 1997 je me suis inscrite au Département de Mathématiques de l'Université de Rome "La Sapienza", où j'ai reçu mon diplôme en 2001 (note : 110 e lode/110), après un travail de diplôme dont le titre est "Esistenza e regolarità di soluzioni per alcuni problemi di Dirichlet" sous la supervision de M. le Prof. Lucio Boccardo (Université de Rome "La Sapienza").

En 2001 je me suis inscrite au doctorat pour accomplir mon travail de recherche dans le domaine des équations aux dérivée partielles, sous la direction de M. le Prof. Bernard Dacorogna. Engagée également comme assistante à l'EPFL, je travaille dans l'enseignement de l'Analyse de premier cycle dans les chaires de M. les Profs. Dacorogna et Stuart.

Je suis auteur ou co-auteur des publications suivantes :

G.Croce and B.Dacorogna : On a generalized Wirtinger inequality, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 9 2003, no. 5, 1329–1341.

G.Croce : A differential inclusion : the case of an isotropic set, *soumis*.